

~(1867) ~~3/10/18~~

Considerem $Q(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S^n} P(\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)})$

el qual és simètric i ~~igual~~ a P quan $\sum \alpha_i = 0$.

Signi W l'hiperpla definit per $\sum \alpha_i = 0$.

$P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) - Q(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ és un polinomi que s'anul·la en tot W .

Podem utilitzar, per exemple el teorema Nullstellensatz sobre $\mathbb{C}$

per a comprovar que $P - Q \in \mathcal{I}(V(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)) = \sqrt{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)} = (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$

i per tant $P - Q = (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) R(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $R \in \mathbb{C}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$

Com $P - Q$ és un polinomi real, R tindrà tots els coeficients reals també.

Per tant, P és de la forma $Q(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) R(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

on $Q, R \in \mathbb{R}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ i Q és simètric.

Per l'altra banda és immediat veure que tots els polinomis d'aquesta forma compleixen les condicions de l'enunciat.