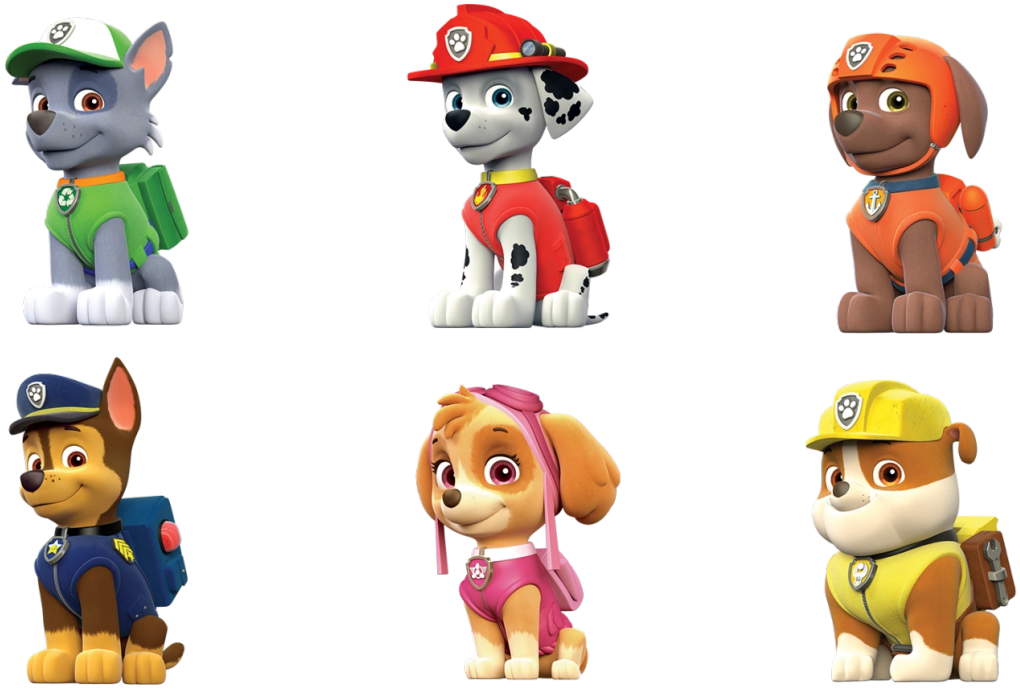
Problema 1906: La $\mathbb{R}$eal integral

🐾🐾 gossos d'esquadra 🐾🐾



Gossos d'esquadra al rescate!

¡Hemos detectado un duelo de integrales no consentido! Ante tal emergencia, hemos venido lo antes posible para detenerlo, pero nuestra base está en Vacarisses y en Rodalies ya no aceptan perros (el pobre Marshall estaba ligero de estómago, en su defensa hay que decir que en el vagón había gente que olía peor que eso).
Llegamos justo a tiempo para tomar declaración a los implicados:

Àlex Rodríguez, víctima y responsable de la solución en variable compleja:
"¿Por qué coño me está tomando declaración un perro que huele a mierda? Lo que me faltaba, llevo 2 semanas redactando y corrigiendo problemas, $\mathrm{T}\omega\sigma$ $\mathrm{M}\epsilon\eta$ $\mathrm{O\Gamma\zeta H}\epsilon\varsigma\tau\Gamma\alpha$ no para de quejarse, la gente no sabe poner el nombre bien a un puto pdf y ahora me viene una panda de perros cocainómanos que dicen haberme salvado. ¡Si he sacado la integral en un pisplás!" *(esconde los 19 folios restantes).*
Mirad, aquí está, es trivial:

Tenemos que $\sin(\sin(x))e^{\cos(x)} = \operatorname{Im}\left(e^{\cos(x)+i\sin(x)}\right) = \operatorname{Im}(e^{e^{ix}})$, por lo que $\int_0^\infty \frac{\sin(\sin(x))}{x}e^{\cos(x)}dx = \int_0^\infty \operatorname{Im}\left(\frac{e^{e^{ix}}}{x}\right)dx = \int_0^\infty \operatorname{Im}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{e^{inx}}{n!x}\right)dx = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\int_0^\infty \operatorname{Im}\left(\frac{e^{inx}}{x}\right)dx = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\int_0^\infty \frac{\sin(nx)}{x}dx$. Observamos que $I_n = \int_0^\infty \frac{\sin(nx)}{x}dx = \int_0^\infty \frac{\sin(u)}{u}du = I_0$, donde hemos hecho el cambio de variables $u = nx$, y que el integrando es par, por lo que $2I_0 = \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$. Vamos a calcular esta integral con una integral de contorno:

Definimos las curvas $\gamma_{1,R}(t) = t,\ t \in [\frac{1}{R}, R]$, $\gamma_{2,R}(t) = Re^{it},\ t \in [0,\pi]$, $\gamma_{3,R}(t) = t,\ t \in [-R, -\frac{1}{R}]$, y $\gamma_{4,R}(t) = \frac{1}{R}e^{i\pi - it},\ t \in [0,\pi]$. Sea $f(z) = \frac{e^{iz}-1}{z}$, holomorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$. Observamos que el conjunto delimitado por $\gamma_R = \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R} + \gamma_{3,R} + \gamma_{4,R}$ no contiene el 0 para todo $R > 1$, por lo que, por el teorema de Cauchy, $\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$. Ahora, calculamos la integral en cada contorno:

- $\int_{\gamma_{1,R}} f(z)dz = \int_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{e^{ix}-1}{x}dx \to \int_0^\infty \frac{e^{ix}-1}{x}dx$ cuando $R \to \infty$
- $\int_{\gamma_{2,R}} f(z)dz = i\int_0^\pi \frac{e^{iRe^{ix}}-1}{Re^{ix}}Re^{ix}dx = i\int_0^\pi (e^{iRe^{ix}} - 1)dx$, $|e^{iRe^{ix}}| = |e^{iR\cos(x) - R\sin(x)}| =$ $= e^{-R\sin(x)} \to 0 \forall x \in (0,\pi)$ cuando $R \to \infty$, por lo que $|\int_0^\pi e^{iRe^{ix}}dx| \leq \int_0^\pi e^{-R\sin(x)}dx \to 0$ cuando $R \to \infty$ (podemos introducir el límite en la integral por el TCD), por tanto $\int_{\gamma_{2,R}} f(z)dz \to -i\pi$
- $\int_{\gamma_{3,R}} f(z)dz = \int_{-R}^{-\frac{1}{R}} \frac{e^{-ix}-1}{x}dx \to \int_\infty^0 \frac{e^{ix}-1}{x}dx$ cuando $R \to \infty$
- $\int_{\gamma_{4,R}} f(z)dz = -i\int_0^\pi \frac{e^{i\frac{1}{R}e^{ix}}-1}{\frac{1}{R}e^{ix}}\frac{1}{R}e^{ix}dx = -i\int_0^\pi (e^{i\frac{1}{R}e^{ix}} - 1)$, ahora $|e^{i\frac{1}{R}e^{ix}}| = |e^{i\frac{1}{R}\cos(x) - \frac{1}{R}\sin(x)}| =$ $= e^{-\frac{1}{R}\sin(x)}$ está dominada por una función integrable. $e^{i\frac{1}{R}e^{ix}} \to 1$ cuando $R \to \infty$, de nuevo por el TCD, $\int_{\gamma_{4,R}} f(z)dz \to 0$

En conclusión,
$0 = \int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_{1,R}} f(z)dz + \int_{\gamma_{2,R}} f(z)dz + \int_{\gamma_{3,R}} f(z)dz + \int_{\gamma_{4,R}} f(z)dz \to -i\pi + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}-1}{z}dz$, igualando las partes imaginarias, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = 2I_0 = \pi \implies I_0 = \frac{\pi}{2}$.

Por tanto, $\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin(\sin(x))}{x}e^{\cos(x)}dx = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\int_0^\infty \frac{\sin(nx)}{x}dx = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}I_0 = \frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!} = \frac{e\pi}{2}}$

Abel Doñate, responsable de la solución en variable real y presunto traficante de una especie de águilas en peligro de extinción:
"Anda, llevaba casi una semana sin ver a un perro con pistola." *(Se quita las gafas de sol para limpiarle los restos de plumas)* "Pues nada, yo pasaba por aquí en mi quinto viaje este mes por el mundo (es duro el año de TFG chavales os lo prometo, yo lo he pasado fatal) cuando detecté con mi superpoder integrador que Àlex había resuelto la integral usando variable compleja.
Veo que el nivel del Integration Bee ha bajado muchísimo desde que lo gané. ¿Variable compleja?" *(Resopla y niega con la cabeza)* "¿Qué será lo siguiente, dejarse la coma del vocativo?¿Comerse el recíproco? Entonces decidí aparecer con la solución, que por algo se llama $\mathbb{R}$eal:"

Empezamos demostrando que

$$\sin(\sin(x))e^{\cos(x)} = \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m\cos^n(x)\sin^{2m+1}(x)}{n!(2m+1)!} = \sum_{n\geq 0}\frac{\sin(nx)}{n!}$$

$\sum_{n\geq 0}\frac{\sin(nx)}{n!} = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{\lceil \frac{n}{2}\rceil - 1}\frac{1}{n!}\binom{n}{2k+1}(-1)^k\sin(x)^{2k+1}\cos(x)^{n-2k-1} =$
$= \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{\lceil \frac{n}{2}\rceil - 1}\frac{(-1)^k\sin(x)^{2k+1}\cos(x)^{n-2k-1}}{(n-2k-1)!(2k+1)!} = \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq (2k+1)}\frac{(-1)^k\sin(x)^{2k+1}\cos(x)^{n-2k-1}}{(n-2k-1)!(2k+1)!} =$
$= \sum_{k\geq 0}\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^k\sin(x)^{2k+1}\cos(x)^m}{m!(2k+1)!}$, donde en el último paso hemos hecho un cambio $m = n-2k-1$(para cada k).

Por lo tanto

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\sin(x))}{x}e^{\cos(x)}dx = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\int_0^\infty \frac{\sin(nx)}{x}dx$$

Ya hemos visto que $\int_0^\infty \frac{\sin(nx)}{x}dx = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$, vamos a calcular ahora esta ecuación con métodos de variable real.

Sea $I(a)=\int_0^\infty \frac{\sin(x)e^{-ax}}{x}dx$ con $a\geq 0$. Tenemos que $I(0)=\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$, y que $\lim_{a\to\infty} I(a)=0$, donde hemos usado que $\frac{\sin(x)e^{-ax}}{x}$ está dominada por $\frac{|\sin(x)|e^{-x}}{x}$ para $a>1$.
$\frac{d}{da}\left(\frac{\sin(x)e^{-ax}}{x}\right)=-\sin(x)e^{-ax}$, que está dominada por e^{-ax}, y por tanto $I'(a)=-\int_0^\infty \sin(x)e^{-ax}dx=\frac{1}{a}[\sin(x)e^{-ax}]_0^\infty-\frac{1}{a}\int_0^\infty\cos(x)e^{-ax}dx=-\frac{1}{a}\left(\frac{-1}{a}[\cos(x)e^{-ax}]_0^\infty-\frac{1}{a}\int_0^\infty\sin(x)e^{-ax}dx\right)=-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2}I'(a)\implies -I'(a)\frac{1+a^2}{a^2}=\frac{1}{a^2}\implies I'(a)=-\frac{1}{1+a^2}\implies I(a)=C-\arctan(a)$, para encontrar C, usamos que $\lim_{a\to\infty}I(a)=C-\frac{\pi}{2}=0\implies C=\frac{\pi}{2}$, luego $I(0)=\int_0^\infty\frac{\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

De nuevo, obtenemos $\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin(\sin(x))}{x}e^{\cos(x)}dx=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\int_0^\infty\frac{\sin(nx)}{x}dx=\frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}=\frac{e\pi}{2}}$

Para los haters que digan que he usado la fórmula de Moivre:

Sea $a_n=\sin(nx)$, $b_n=\cos(nx)$, demostramos por inducción que

$a_n=\sum_{k=0}^{\lceil\frac{n}{2}\rceil-1}(-1)^k\binom{n}{2k+1}\sin(x)^{2k+1}\cos(x)^{n-2k-1}$, $b_n=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2k}\sin(x)^{2k}\cos(x)^{n-2k}$

$a_n=\sin(nx)=\sin(x)\cos((n-1)x)+\cos(x)\sin((n-1)x)=$
$\sin(x)\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n-1}{2k}\sin(x)^{2k}\cos(x)^{n-2k-1}+\cos(x)\sum_{k=0}^{\lceil\frac{n-1}{2}\rceil-1}(-1)^k\binom{n-1}{2k+1}\sin(x)^{2k+1}\cos(x)^{n-2k-2}=$

$=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n-1}{2k}\sin(x)^{2k+1}\cos(x)^{n-2k-1}+\sum_{k=0}^{\lceil\frac{n-1}{2}\rceil-1}(-1)^k\binom{n-1}{2k+1}\sin(x)^{2k+1}\cos(x)^{n-2k-1}$

- n par:
  $\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}(-1)^k\binom{n-1}{2k}\sin(x)^{2k+1}\cos(x)^{n-2k-1}+\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}(-1)^k\binom{n-1}{2k+1}\sin(x)^{2k+1}\cos(x)^{n-2k-1}=$
  $=\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}(-1)^k\sin(x)^{2k+1}\cos(x)^{n-2k-1}\left(\binom{n-1}{2k}+\binom{n-1}{2k+1}\right)=$
  $=\sum_{k=0}^{\lceil\frac{n}{2}\rceil-1}(-1)^k\sin(x)^{2k+1}\cos(x)^{n-2k-1}\binom{n}{2k+1}$
- n impar:
  $\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^k\binom{n-1}{2k}\sin(x)^{2k+1}\cos(x)^{n-2k-1}+\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}}(-1)^k\binom{n-1}{2k+1}\sin(x)^{2k+1}\cos(x)^{n-2k-1}=$
  $=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\binom{n-1}{n-1}\sin(x)^n+\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}}(-1)^k\sin(x)^{2k+1}\cos(x)^{n-2k-1}\left(\binom{n-1}{2k}+\binom{n-1}{2k+1}\right)=$
  $=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin(x)^n+\sum_{k=0}^{\lceil\frac{n-2}{2}\rceil-1}(-1)^k\sin(x)^{2k+1}\cos(x)^{n-2k-1}\binom{n}{2k+1}=$
  $=\sum_{k=0}^{\lceil\frac{n}{2}\rceil-1}(-1)^k\sin(x)^{2k+1}\cos(x)^{n-2k-1}\binom{n}{2k+1}$

Idem para la secuencia b_n.

Marshall, responsable de la declaración:
"Ya sé que debería haber tirado la lata de atún que llevaba una semana abierta, pero no me gusta tirar comida."

🐾🐾🐾🐾🐾🐾

Mensaje de despedida de Gossos d'Esquadra:
Queríamos agradeceros todo el trabajo que habéis hecho durante estos días, especialmente siendo tan pocos. Actividades tan especiales como estas son parte de la magia de estudiar en la FME, y necesitan personas que pongan su granito de arena y vosotros lo habéis hecho genial. Nos lo hemos pasado muy guau resolviendo y redactando los problemas, esperamos que os hayáis echado alguna risa leyendo nuestras soluciones perrunas.

🐾🐾🐾🐾🐾🐾