

Mesozoico

El Mormosaurio (l'Abel) s'ha deixat l'àguila a las Vegas, i ara mateix està molt ocupat amb l'estudi intensiu del pla de salvació que li han oferit els mormons (i no en les seves feligreses, com alguns diuen). Malauradament, al *Book of Mormon* no hi ha cap integral, així que ha perdut la pràctica. Per sort, els seus amics el Tradesaurio (el Javi) i el Xapasaurio (el Ferran), com sempre, estan disposats a tirar-se uns factous (sense cap mena de seguretat, esclar).

El Tradesaurio és el primer en intervenir en la conversa, i diu:

Factou 1 (Tradesaurio). *Trivialment* $\sin(\sin x)e^{\cos x} = \text{Im}e^{e^{ix}}$

Després de la seva intervenció, el Xapasaurio el mira amb cara d'aprovació (no té ni puta idea del que ha dit, però respecta l'art del factou) i afegeix:

Factou 2 (Xapasaurio). *Sigui* $a > 0$. *Llavors, trivialment*

$$J = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

El Mormosaurio no n'està del tot convençut, però decideix provar sort amb aquests dos factous. Per tant, considerem la integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin(\sin x)e^{\cos x}}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\Im(e^{e^{ix}})}{x} dx = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \frac{\Im(e^{inx})}{x} dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \int_0^\infty \frac{\Im(e^{inx})}{x} dx$$

on hem utilitzat el Factou 1, hem fet un Taylor i hem intercanviat la suma amb la integral (que es pot fer, ja tu decideixes si és el Factou 3 o és veritat). Ara bé, com que $\Im(e^{inx}) = \sin nx$, observem que el primer terme de la suma es zero. Per tant

$$I = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} \int_0^\infty \frac{\sin nx}{x} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} = \boxed{\frac{\pi}{2}(e-1)}$$

on hem fet servir el Factou 2.

No obstant això, el Mormosaurio no està gaire content amb els Factous del Tradesaurio i el Xapasaurio i es disposa a provar els resultats.

Proof. (Factou 1)

$$\sin(\sin x)e^{\cos x} = \Im(e^{i \sin x})e^{\cos x} = \Im(e^{i \sin x + \cos x}) = \Im(e^{e^{ix}})$$

□

Proof. (Factou 2) Sigui $a > 0$. Llavors considerem

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} e^{-tx} dx \quad \Rightarrow \quad F'(t) = - \int_0^\infty \sin(ax) e^{-tx} dx$$

Computem la integral

$$F'(t) = - \int_0^\infty \sin(ax) e^{-tx} dx = -\Im \left(\int_0^\infty e^{(ia-t)x} dx \right) = -\Im \left(\frac{1}{ia-t} \right) = -\Im \left(\frac{t+ia}{t^2+a^2} \right) = -\frac{a}{t^2+a^2}$$

Observem que $F(0) = J$ i $F(\infty) = 0$ ¹. Per tant, tenim que

$$F(\infty) - F(0) = - \int_0^\infty \frac{a}{t^2 + a^2} dt \quad \Rightarrow \quad J = \int_0^\infty \frac{a}{t^2 + a^2} dt = a \cdot \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{t}{a}\right) \Big|_0^\infty = \arctan(\infty) - 0 = \frac{\pi}{2}$$

□

El Mormosaurio respira alleujat, ja que pot donar per feta la seva feina (encara que no el retornaran les hores malgastades per culpa de la integral que es va posar malament al principi).

¹Realment fem el limit, però quin putu pal escriure-ho