

1918. Paseillo a Francia

$T\omega\sigma\ M\varepsilon\eta\ O\Gamma\zeta H\varepsilon\varsigma\tau\Gamma\alpha$

6 de març de 2025

Finalment ha arribat el dia. Els membres del ‘Club de paseillos extremos’ es posen les motxilles i marxen cap al seu gran objectiu. Per fer honor al seu nom, no faran 30 km o 60 km, sinó 150 km fins a França. És clar, sense descans, i sota el perill que apareguin *Figures Ocultes*. Per a sorpresa de tots, en arribar al quilòmetre 70 ja va ser difícil mantenir el cos en moviment, ignorant la son i el dolor en tots els músculs. Per això, per distreure’s el Carlos va idear un joc que els permetria jugar una bona estona. El Carlos havia pensat en una funció $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ que assegura que és no constant i periòdica de període un nombre primer $p < 200$. Li repta al Luis a determinar el període de la següent manera: el Luis dirà una llista de n enters $x_1, \dots, x_n$ i el Carlos respondrà amb la llista d’imatges $f(x_1), \dots, f(x_n)$ corresponents. Això, només una vegada. I amb aquesta informació, el Luis ha d’endevinar el període. El Luis, que té un mal de cap terrible, només vol silenci. Podeu ajudar-lo a trobar el mínim n tal que pugui assegurar que guanyarà i gaudir del seu apreciat silenci el més aviat possible?

És 399. 399 es pot assolir preguntant pels nombres x_i tals que $x_i \equiv i \pmod{p}$ per a tot $p < 199$ i $x_i \equiv i \pmod{199}$. Si obtenim sempre el mateix nombre, el període és 199 necessàriament, mentre que si no, no ho és. Així, ens oblidem del 199, i reanomenem x_i amb i , perquè a efectes pràctics és el que és.

Els valors que ens donen determinen el període. Això és perquè si els valors fossin compatibles amb ser p -periòdica i q -periòdica, llavors $f(p+q)$ determina que tots els valors són menors o iguals a ell, i això i la p -o- q -periocitat, faria que la funció fos constant, cas que ja hem descartat. Això és per un isomorfisme entre aquest problema i el de moure aigua de gerros d’un a l’altre. Els gerros són de capacitat $p+q$, p i q , i l’argument de f és la quantitat de líquid al gerro gros. Un moviment en el joc que involucri el gerro gros es tradueix a usar p -periòdica o q -periòdica. Com que és conegut que [si p i q són coprims, existeix un cicle que passa per totes les possibles quantitats de líquid al gerro gros (fent l’únic pas no inútil cada cop), i en aquest cicle estan el gerro buit i ple de costat], llavors puc fer un camí de qualsevol configuració a qualsevol altra sense passar pel gerro buit o el gerro ple, és a dir, avaluant f només en $1, 2, 3, \dots, 399$.

Ara falta la fita. Per a cada primer p , comptem el nombre de congruències mòdul p diferents entre els nombres preguntats. Si hi ha dos primers p, q on una de les congruències no hi és (posem a_p per la p i a_q per la q), llavors en Carlos pot respondre 0 a tot i les funcions

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \not\equiv a_p \pmod{p} \\ 1 & \text{si } x \equiv a_p \pmod{p} \end{cases} \quad \text{i } g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \not\equiv a_q \pmod{q} \\ 1 & \text{si } x \equiv a_q \pmod{q} \end{cases}$
 tenen diferent període i són compatibles amb les respostes d'en Carlos.

Similarment, si hi ha un nombre x_k preguntat que és l'únic de la seva classe mòdul p i l'únic mòdul q , aleshores en Carlos pot respondre 0 a tot excepte x_k , 1 a x_k i les funcions compatibles $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \not\equiv x_k \pmod{p} \\ 1 & \text{si } x \equiv x_k \pmod{p} \end{cases}$ i $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \not\equiv x_k \pmod{q} \\ 1 & \text{si } x \equiv x_k \pmod{q} \end{cases}$ tenen diferent període.

Ara mirem els primers $p > q$ més grans que tenen totes les classes. Tenim $p \geq 197$ i $q \geq 193$. Demostrarem que cal preguntar almenys $p + q$ nombres. Ens fem un graf on els vèrtexs són les x_i 's i les arestes són x_i, x_j difereixen en un múltiple de p o q . Hi ha n vèrtexs, i si mirem les arestes corresponents a p , n'hi ha $n - p$, ja que el nombre de components connexes és p . Semblantment, hi ha $n - q$ arestes corresponents a q . Per ser connex, és necessari que $V \leq E + 1$, és a dir $n \leq E + 1 \leq (n - p) + (n - q) + 1$, o $n \geq p + q - 1 \implies n \geq 399$.