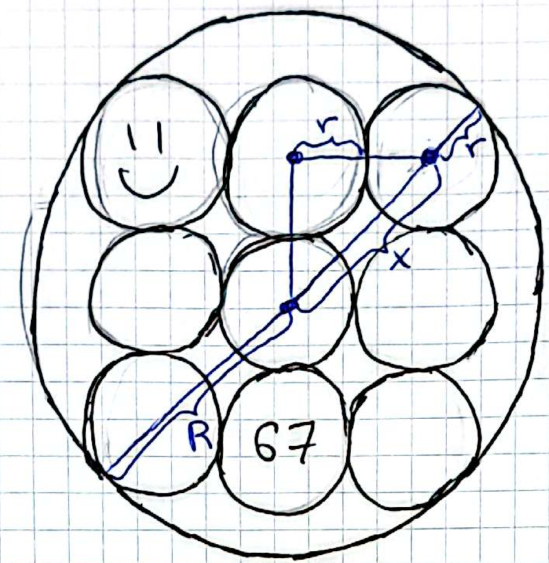
Flors de Fajol

5. Això encara segueix anant de tradicions



Volem saber el valor del radi de les circumferències petites. Sigui R = radi de la circumferència gran = 1, r = radi petit, x = distància entre centres de dos circumferències en posició diagonal.

Aleshores, per Pitàgores i per ser les circumferències tangents, tenim que:

$$\left.\begin{cases} R = r + x \\ (2r)^2 + (2r)^2 = x^2 \iff x = 2\sqrt{2}\,r \end{cases}\right\} \Rightarrow R = r + x = r + 2\sqrt{2}r = r(2\sqrt{2}+1) \Rightarrow r = \frac{R}{2\sqrt{2}+1}$$

Tenint en compte que el cercle inicial té radi 1, restem recursivament l'àrea de les circumferències petites:

$$\text{Àrea} = \pi - 8\pi\left(\left(\frac{1}{2\sqrt{2}+1}\right)^2\right) - 8\pi\left(\left(\frac{1}{2\sqrt{2}+1}\right)^4\right) - \ldots\ldots =$$

$$= \pi - 8\pi \sum_{i\geq 1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}+1}\right)^{2i} = \pi - 8\pi\sum_{i\geq 1}\left(\frac{1}{(2\sqrt{2}+1)^2}\right)^i =$$

$$= \pi - 8\pi\frac{1}{9+4\sqrt{2}}\cdot\sum_{i\geq 0}\left(\frac{1}{9+4\sqrt{2}}\right)^i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{suma} \\ \text{geomètrica}}}{=} \pi - 8\pi\cdot\frac{1}{9+4\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9+4\sqrt{2}}} = \rightarrow$$

Escaneado con CamScanner

$= \pi - 8\pi \cdot \dfrac{1}{9+4\sqrt{2}-1} = \pi - 8\pi \cdot \dfrac{1}{8+4\sqrt{2}} = \pi - \dfrac{2\pi}{2+\sqrt{2}} =$

$= \pi - \pi(2-\sqrt{2}) = \underline{(\sqrt{2}-1)\,\pi}$

Escaneado con CamScanner