

10. Festes macarròniques

Definirem el camí de la Maria a partir de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} & \text{si } x \in [\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1] \end{cases}$$

Suposem que la Maria s'ha quedat sense bateria al mòbil.

Veiem primer que la Maria arribarà a on vol $[(1,1)]$, sense necessitat de Google Maps:

$$f(1) = 1 \cdot \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 1 \quad \checkmark$$

A més, surt del $(0,0)$: $f(0) = \sqrt{2} \cdot 0 = 0$

Ara, només queda veure que aquest camí no requereix que la Maria faci TP, i més important, que no trepitji macarrons.

Com que $f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, i $f(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}) + 1 - \sqrt{2} = \frac{3}{\sqrt{2}} - 1 + 1 - \sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tenim que la Maria no haurà de fer TP. A més, cada tros és continuu.

Si x és irracional, no hi haurà macarrons, sigui quin sigui el valor de $f(x)$. Si x és racional, tenim 3 possibilitats per $f(x)$:

- 1r tros: Multiplicació de racional per $\sqrt{2}$ (trivial que és irracional) $\Rightarrow$ resultat clarament irracional
- 2n tros: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ que és irracional per definició (probablement)

- 3r tros: $f(x) = \underbrace{(x-1)}_{\substack{\text{racional} \\ \text{racional} \\ \text{racional}}} \underbrace{\sqrt{2}}_{\text{irracional}} + 1$

Ja que irracional per racional és irracional,
 racional + irracional = irracional
 i racional + racional = 2 racional

R/ Per tant, $f(x) \notin \mathbb{Q} \quad \forall x \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ La Maria serà feliç sense trepitjar macarrons.