18. El d'Àlgebra Facilet

Els únics n pels quals existeix aquests S són $n = 1$ i 7, amb construccions

$S = \{0\}$, $S = \{0, \pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$

Claim 1: Tots els vectors han de tenir mòdul 0 o 1.

Demo: Sigui $\overset{*}{v} \in S$. Per definició sabem que existeixen $u, w \in S$ t.q. $u \times w = v$, llavors $v_2 := v \times u \in S$, és NO nul i és perpendicular a v. Ara definim $v_{n+1} = v_n \times v$. Tots aquests vectors són perpendiculars a v així que

$\|v_{n+1}\| = \|v_n \times v\| = \|v_n\| \cdot \|v\|$

Si $\|v\| \neq 1$, llavors $(\|v_n\|)_{n \geq 2}$ prendrà infinits valors implicant que $|S| = \infty$ $\square$

Claim 2 Donats dos vectors $u, v \in S$, $u \cdot v \in \{-1, 0, 1\}$

Demo: Suposem que u i v són no nuls. Llavors

$\|u \times v\|^2 + |u \cdot v|^2 = (\|u\|\|v\|)^2 = 1 \Rightarrow \|u \cdot v\|^2 = 1 - \|u \times v\|^2 \in \{0, 1\}$

$\Rightarrow u \cdot v \in \{-1, 0, 1\}$ $\square$

Aquest últim claim ens implica que els vectors de S seran ortogonals o paral·lels. Ara toca fer casos: $0 \in S$ sempre ja que $v \times v = 0$

- Quan $n=2$: ✗

$S = \{0, v\}$ però no es pot expressar v com a producte de 2 elements

- <u>No podem ser tots coplanars</u> (si $S \neq \{0\}$)

Ja que si $u, v \in S$ i son no nuls llavors $u \times v$ no es coplanar amb u i v

- <u>Si v està en S, $-v$ també</u>:

Si $u \times w = v$, llavors $w \times u = -v \in S$.

<u>Recapitulem:</u> Si $S \neq 0$, haurem de tenir 3 vectors ortogonals de longitud 1, i a més haurem de tenir els seus negatius $\Rightarrow |S| \geq 7$.

WLOG podem assumir que $\{0, \pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\} \subseteq S$

Si $v \in S$ i $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$, pel claim 2 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \{\pm 1, 0\}$ i si n'hi ha 2 no nuls, llavors $\|v\| > 1$. Això ens demostra que $v \in \{0, \pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$

$\Rightarrow |S| = 7$