

— URracas del Ebro —

Universidad de La Rioja

Problema 6 – Lista 2. Sea $P_n = (p_{ij})$ una matriz *Roura* de tamaño $n \times n$, aleatoria. Sea X_n la variable aleatoria $\det P_n$. Usando la fórmula de Leibniz para determinantes cuando $n \geq 2$,

$$X_n = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n p_{i, \sigma(i)}$$

donde S_n denota el grupo de permutaciones de n elementos, y la función sgn devuelve 1 si σ es par y -1 si σ es impar. Tomando la esperanza a ambos miembros de la igualdad,

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[p_{i, \sigma(i)}] = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n \left(0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma)$$

Como en S_n hay exactamente $n!/2$ permutaciones pares y $n!/2$ permutaciones impares, esta suma vale 0 independientemente del valor de $n \geq 2$. Ahora calculemos la varianza como $\text{Var}(X_n) = \mathbb{E}[X_n^2] - \mathbb{E}^2[X_n] = \mathbb{E}[X_n^2]$.

$$\text{Var}(X_n) = \mathbb{E}[X_n^2] = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n p_{i, \sigma(i)} p_{i, \tau(i)} \right]$$

Cuando $\sigma(i) = \tau(i)$, estaremos multiplicando una entrada por sí misma, y como en una matriz *Roura* las entradas son 0 o 1 (six-seven para nuestros queridos amigos de característica 2), $p_{ij}^2 = p_{ij}$; en este caso, $\mathbb{E}[p_{i, \sigma(i)} p_{i, \tau(i)}] = \mathbb{E}[p_{i, \sigma(i)}] = 1/2$. De lo contrario, estaríamos multiplicando dos variables independientes de la misma fila de la matriz. La esperanza del producto será pues el producto de las esperanzas: $\mathbb{E}[p_{i, \sigma(i)} p_{i, \tau(i)}] = \mathbb{E}[p_{i, \sigma(i)}] \mathbb{E}[p_{i, \tau(i)}] = 1/4$. Sea $k(\sigma, \tau)$ el número de veces que coinciden $\sigma(i)$ y $\tau(i)$, con i entre 1 y n . Entonces,

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n p_{i, \sigma(i)} p_{i, \tau(i)} \right] = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} = \frac{2^k}{4^n}$$

Sustituimos de vuelta considerando el cambio de variable $\eta = \sigma^{-1}\tau$. Así, $\text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) = \text{sgn}(\eta)$, y $k(\sigma, \tau)$ pasa a ser el número de puntos fijos de η . Fijado un σ , al sumar sobre todas las posibles permutaciones τ tenemos que η recorre todo S_n , ya que $S_n = \sigma^{-1}S_n$ para todo $n \geq 2$ y para toda $\sigma \in S_n$. Como tenemos $n!$ posibles σ distintas, el sumatorio pasa a ser

$$\text{Var}(X_n) = \frac{1}{4^n} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) 2^{k(\sigma, \tau)} = \frac{1}{4^n} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\eta \in S_n} \text{sgn}(\eta) 2^{k(\eta)} = \frac{n!}{4^n} \det A_n$$

donde A_n es la matriz

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{Id}_n + \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Id}_n + B_n$$

Por inducción, es inmediato ver que $\det A_n = n+1$ para todo n (también podemos verlo por el espectro: Id_n tiene como único valor propio el 1, con multiplicidad n , y B_n tiene como valores propios n , con

multiplicidad 1, y 0, con multiplicidad $n - 1$; sumando los valores propios, concluimos que el espectro de A_n es $n + 1$, con multiplicidad 1, y 1, con multiplicidad $n - 1$, luego $\det A_n = (n + 1) 1^{n-1} = n + 1$. Luego

$$\text{Var}(X_n) = \frac{(n+1)!}{4^n}, \quad n \geq 2$$

El caso particular $n = 1$ merece ser tratado aparte: la esperanza de X_1 claramente no es 0.

$$\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[\det P_1] = \mathbb{E}[\det(p_{11})] = \mathbb{E}[p_{11}] = 1/2$$

Y en el caso de la varianza,

$$\text{Var}(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}^2[X_1] = 1/2 - 1/4 = 1/4$$