

37. BlanqueJant diners

Col·loca el quadrat en un sistema de coordenades amb eixos paral·lels als costats i una cantonada al $(0, 0)$. Siguin (a, b) i (c, d) les posicions dels centres de D_1 i D_2 . Reorientant el quadrat si cal, posem suposar $a \leq c$ i $b \leq d$.

Si s és la longitud del maletí, tenim les següents desigualtats: $1 \leq a$, $1 \leq b$, $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \leq (c - a)^2 + (b - d)^2$, $c + \frac{1}{2} \leq s$ i $d + \frac{1}{2} \leq s$. Llavors,

$$1 + (c - a) + \frac{1}{2} \leq a + (c - a) + \frac{1}{2} = c + \frac{1}{2} \leq s$$

$$1 + (d - b) + \frac{1}{2} \leq b + (d - b) + \frac{1}{2} = d + \frac{1}{2} \leq s$$

Per tant, les quantitats no-negatives $c - a$ i $d - b$ són menors a $s - \frac{3}{2}$, així que la mitjana quadràtica entre les dues també ho és:

$$\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2} \leq \sqrt{\frac{(c - a)^2 + (d - b)^2}{2}} \leq s - \frac{3}{2} \implies s \geq \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{2} + 1)}{2\sqrt{2}}$$

I per tant l'àrea mínima és $\left(\frac{3(\sqrt{2} + 1)}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{8}(\sqrt{2} + 1)^2 = \frac{9}{8}(3 + 2\sqrt{2})$. Ara cal veure que és assolible.

El que farem és demostrar que podem col·locar les monedes $D_1, D_2, \dots, D_{15}$, juntament amb un rectangle, dins d'un quadrat de longitud $s = \frac{3(\sqrt{2} + 1)}{2\sqrt{2}}$, i que podem col·locar $D_{16}, D_{17}, \dots$ dins d'aquest rectangle, cosa que finalitzarà la prova. La comprovació de la col·locació (de la qual donem els centres) es deixa al lector¹:

$$O_1 = (1, 1)$$

$$O_2 = \left(s - \frac{1}{2}, s - \frac{1}{2}\right)$$

$$O_3 = \left(s - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$O_4 = \left(\frac{1}{4}, s - \frac{1}{4}\right)$$

$$O_5 = \left(s - \frac{1}{5}, \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)$$

$$O_6 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

$$O_7 = \left(\frac{1}{7}, s - \frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right)$$

$$O_8 = \left(s - \frac{2}{3} - \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

$$O_9 = \left(2 + \frac{1}{9}, s - 1 - \frac{1}{9}\right)$$

$$O_{10} = \left(2 + \frac{1}{10}, \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right)$$

$$O_{11} = \left(2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{11}, \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{11}\right)$$

$$O_{12} = \left(2 + \frac{2}{9} + \frac{1}{12}, s - 1 - \frac{1}{12}\right)$$

$$O_{13} = \left(s - \frac{1}{13}, s - 1 - \frac{1}{13}\right)$$

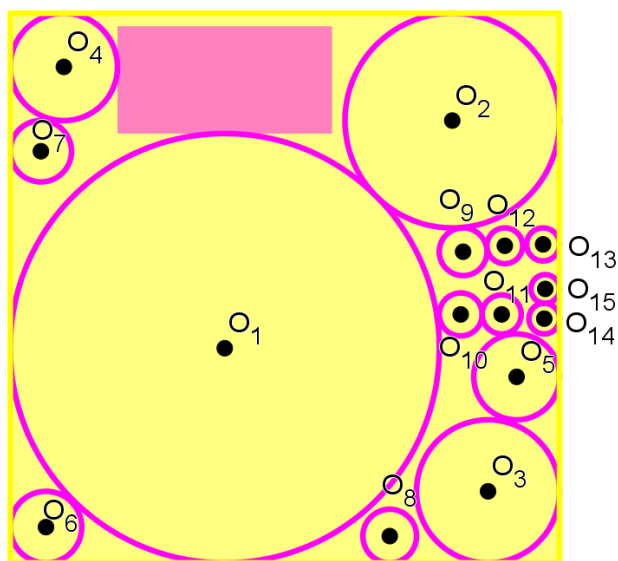
$$O_{14} = \left(s - \frac{1}{14}, \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{14}\right)$$

$$O_{15} = \left(s - \frac{1}{15}, \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15}\right)$$

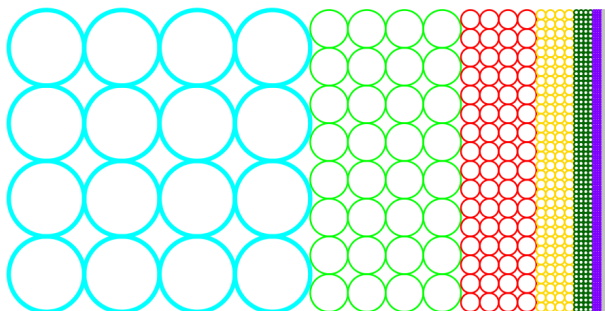
$$\text{Rectangle} = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \times \left[2, \frac{5}{2}\right]$$

Falta col·locar D_n per a $n \geq 16$ dins del rectangle, que té dimensions $1 \times \frac{1}{2}$.

¹La majoria de parelles de cercles no intersequen perquè no ho fan les seves bounding boxes. Les úniques excepcions són les parelles (D_1, D_3) , (D_1, D_7) i (D_1, D_8) , i és clar (D_1, D_2) .



Per a fer-ho, ampliarem el radi de cada D_n fins que sigui igual a D_{2^k} , on k és el nombre natural que fa $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Un cop col·loquem els discs ampliats al rectangle, podem substituir-los pels discs autèntics concèntricament sense solapament. Hi ha 2^k discs ampliats de radi $\frac{1}{2^k}$, per a cada $k \geq 4$. Es posen al rectangle d'acord amb la següent il·lustració, i hi caben ja que $4 \cdot \frac{2}{2^k} = 2^{3-k}$, així que l'alçada és de $2^{3-4} = \frac{1}{2}$ i l'amplada de $2^{3-4} + 2^{3-5} + 2^{3-6} + \dots = 1$:



Three Men Orchestra