

Problema 19.

ENCURTIDOS VILLAREAL

February 27, 2026

Aquest problema no és més que un problema clàssic disfressat (visca carnestoltes or whatever). El Manu guanya¹ si i només si $\nu_2(x)$ és parell.

Considerarem que les posicions $(a, b, c, x) = (0, 1, 2, 0)$ i $(a, b, c, x) = (0, 1, 2, 1)$ són perdedores per conveni. És a dir, si x fós 0 o 1 diem que el Manu guanya només començar la partida.

Suposa que estem en la posició (a, b, c, x) , i nota $c = 2b - a$. Llavors observem que aquesta posició de joc equival a la posició $(0, 1, 2, \lfloor (x - a)(b - a) \rfloor)$. El motiu és una transformació lineal. Primer, la posició és equivalent a $(0, b - a, 2(b - a), x - a)$ ja que restar a a tots els nombres no canvia res. Ara, sempre que escribim un nombre serà múltiple de $b - a$, pel que podem canviar x per $(b - a)\lfloor (x - a)/(b - a) \rfloor$ i no canvia res. Per tant, podem dividir tots els nombres de la situació per $b - a$ i ens queda que la posició equival a $(0, 1, 2, \lfloor (x - a)/(b - a) \rfloor)$.

Suposa que estem a la posició $(0, 1, 2, x)$. Els nostres moviments possibles ens porten a $(1, 2, 3, x)$ o a $(0, 2, 4, x)$. En el primer cas, la posició equivaldrà a $(0, 1, 2, x - 1)$, i en el segon equivaldrà a $(0, 1, 2, \lfloor x/2 \rfloor)$. Per tant, el problema que ens heu donat és el següent problema disfressat:

Problema. Manu i Álvaro juguen. Inicialment x està escrit a la pissarra. Cada torn qui jugui pot canviar x o per $x - 1$ o per $\lfloor x/2 \rfloor$. El jugador que arribi a $x = 1$ o a $x = 0$ perd.

De nou per conveni el Manu guanya si $x = 0$ o $x = 1$. Claimejem que el Manu guanya per $x \geq 2$ si i només si $\nu_2(x)$ és parell. Això és well-known amb probabilitat 2. Anyway, ho demostrem fent inducció forta. Els casos base són 0 i 1. Suposa que $2, 3, 4, \dots, x - 1$ segueixen el nostre claim.

- Si $\nu_2(x)$ és parell i no-zero, pots baixar a la posició perdedora $x/2$ i per tant x és guanyadora.
- Si $\nu_2(x)$ és senar, tant $x - 1$ com $x/2$ són perdedores pel que estàs jodido i x és perdedora.
- Per últim suposa x senar. Escribim $x = 1 + (x - 1) = 1 + 2^a k$ on $a = \nu_2(x - 1)$. Si a és parell, llavors pots jugar $\lfloor x/2 \rfloor$ i arribar a la posició $2^{a-1}k$, que és perdedora. Si a és senar, pots jugar $x - 1$ i arribar a la posició $2^a k$, que és perdedora. Per tant x sempre és guanyadora.

¹No és un typo, he decidit que escriuré guanyar enlloc de guanyar al llarg de tota la demostració.