BONUS 21. El Barça

CARLOS MUJERIEGO ✡

Anem a considerar un joc més general on $P(V=1)=q$ sota la informació del maker.

Primer, definim unes funcions per a $n\geq 1$: $T_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

on T_n és definida per el Spline C^0 lineal a partir dels punts $\left(\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{j} \, , \, \frac{1}{2^n}\binom{n-1}{i} \right)$ $i\in\{-1,0,\dots, n\}$

Demostrem que el taker té una estratègia que pot ser revelada on el expected value és $n\cdot T_n(q)$.

Com $T_n(0.5) \approx \frac{1}{2^n}\binom{n-1}{n-1/2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, el guany és $n\cdot O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = O(\sqrt{n}) \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$

La estratègia del taker depèn del nombre de rondes restants (n) i de la probabilitat de V de ser 1 (q) sota la informació del maker (informació de tots els trades).

La estratègia serà, si queden n torns:

$$\begin{cases} \text{Si } V=1, \text{ comprar amb prob } x(q,n), \text{ vendre amb prob } 1-x(q,n). \\ \text{Si } V=0, \text{ comprar amb prob } y(q,n), \text{ vendre amb prob } 1-y(q,n). \end{cases}$$

On $x(q,n) = \frac{1}{2}\left(\frac{T_n(q)}{q} + 1 \right)$ i $y(q,n) = 1 - x(1-q, n)$

Com la estratègia és pública, després de cada acció el maker pot actualitzar la prob de que $V=1$ donat que ha hagut compra/venta amb el teorema de Bayes:

$$q_{\text{NOVA} \mid \text{COMPRA}} = \frac{q_{\text{PRÈVIA}}\cdot x}{q_{\text{PRÈVIA}}\cdot x + (1-q_{\text{PRÈVIA}})\cdot y}$$

$$q_{\text{NOVA} \mid \text{VENTA}} = \frac{q_{\text{PRÈVIA}}\cdot (1-x)}{q_{\text{PRÈVIA}}\cdot (1-x) + (1-q_{\text{PRÈVIA}})(1-y)}$$

On $x = x(q_{\text{PREVIA}}, n)$

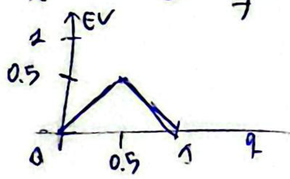
$y = y(q_{\text{PREVIA}}, n)$

Després de la acab, el joc seguirà jugant-se com un joc de $n-1$ rondes i probabilitat de $V=1$ q_{NOVA}.

Anem a provar, que si el taker segueix aquesta estratègia, el EV no depen del preu que pose el maker al contrate de V (Notem que aquesta estratègia no depèn dels preus que impose el maker abans de decidir si comprar/vendre).

Ho provem per inducció. Per al joc de $n=1$ rondes és clar que el Taker sempre compra si $V=1$ i ven si $V=0$, i que el maker posarà com a preu 0 si $q<0.5$ i 1 si $q>0.5$, i el

$$EV(\text{Taker}) = 0.5 - |q-0.5|$$



Per al joc amb $n>1$ torns, si el maker posa preu λ en la primera ronda, per hipòtesi d'inducció el EV és:

(Si anomenem $E_n(q) = \mathbb{E}(\text{taker}, n \text{ rondes}, prob(V=1)=q \mid V=1))$
l'ev del taker donat que sap que $V=0$ és $E_n(1-q)$ per simetria
i l'ev total és $\mathbf{E}_n(q) = qE_n(q) + (1-q)E_n(1-q)$.)

L'EV amb preu del maker λ és:

$$q\left((2x-1)(1-\lambda) + xE_{n-1}(q_{NOVA|COMPRA}) + (1-x)E_{n-1}(q_{NOVA|VENTA})\right)$$
$$+(1-q)\left((2y-1)(-\lambda) + yE_{n-1}(1-q_{NOVA|COMPRA}) + (1-y)E_{n-1}(1-q_{NOVA|VENTA})\right)$$

$$= \boxed{\begin{array}{l}(2x-1)q(1-\lambda) + (2y-1)(1-q)(-\lambda) + \\ \quad + (qx+(1-q)y)\mathbf{E}_{n-1}(q_{NOVA|COMPRA}) + (q(1-x)+(1-q)(1-y))\mathbf{E}_{n-1}(q_{NOVA|VENTA})\end{array}}$$

Si usem les nostres $x=X(q,n)$, $y=Y(q,n)$ i per inducció suposem que $\mathbf{E}_{n-1}(q) = (n-1)T_{n-1}(q)$, es pot veure (per exemple, per ordenador) que la expressió de dalt no depèn de λ i val $n\cdot T_n(q)$

TEOREMA: El maker té una estratègia on el taker no pot guanyar més de $nT_n(q)$ en EV i els diners guanyats sols depenen de si $V=1$ o $V=0$, independentment de les accions del Taker.

Com a corol·lari del teorema, com $\exists$ estratègia del maker que no depèn de les accions del Taker (i per tant no de la estratègia), aquestes dues estratègies formen un equilibri de Nash i per això deduïm que el Taker pot robar com a màxim i com a mínim a BET365 $n \cdot T_n(0.5) = O(\sqrt{n})$.

Nota: no cal provar el teorema ni descriure la estratègia del maker per a la marató, així que m'ho ahorro ja que és molt tediós difícil de descriure (té una expressió rara, com la del taker).

Si voleu detalls: guillem.beltrancerezuela@gmail.com