

Encurtidos Villareales

P16. Apostant al joc

Considerem el problema més general on coneixem que el primer jugador ha guanya m partides i el segon n . Definim a_{mn} com els diners que guanyem en el pitjor dels casos seguint la millor estratègia.

Notem que $a_{0k} = a_{k0} = 2^k$, ja que si coneixem els resultats de les totes les partides podem apostar sempre al guanyador i duplicar els nostres diners cada torn.

Per cada estat (m, n) he d'apostar una proporció x dels meus diners a un dels jugadors.

Considerem primer al cas que aposto x_1 al 1r jugador.

- Si encerto, tindrè $1 + x_1$ i aleshores queden $(m - 1, n)$, pel qual el nombre de diners finals serà $(1 + x_1)a_{m-1,n}$
- Si no, tindrè $1 - x_1$ i aleshores queden $(m, n - 1) \Rightarrow$ diners finals: $(1 - x_1)a_{m,n-1}$.

En els pitjor dels casos, els diners finals seran $\min\{(1 + x_1)a_{m-1,n}, (1 - x_1)a_{m,n-1}\}$. Nosaltres volem trobar el màxim d'aquesta funció per a $x_1 \in [0, 1]$. Per trobar-ho miro la intersecció de les dues rectes:

$$(1 + x_1)a_{m-1,n} = (1 - x_1)a_{m,n-1} \Rightarrow x_1 = \frac{a_{m,n-1} - a_{m-1,n}}{a_{m,n-1} + a_{m-1,n}}$$

Si $a_{m-1,n} \leq a_{m,n-1}$ aleshores $x_1 \in [0, 1]$ i podem apostar aquesta quantitat. En aquest cas, els diners finals seran

$$(1 + x_1)a_{m-1,n} = \left(1 + \frac{a_{m,n-1} - a_{m-1,n}}{a_{m,n-1} + a_{m-1,n}}\right)a_{m-1,n} = \frac{2a_{m,n-1}a_{m-1,n}}{a_{m,n-1} + a_{m-1,n}} = \left(\frac{a_{m,n-1}^{-1} + a_{m-1,n}^{-1}}{2}\right)^{-1}$$

Però si $a_{m-1,n} > a_{m,n-1}$ aleshores $x_1 < 0$ i la quantitat òptima per apostar seria 0, en qual cas guanyariem $\min\{a_{m,n-1}, a_{m-1,n}\}$ en el pitjor dels casos.

Ara, el cas on aposto x_2 al 2n jugador serà exactament anàleg: el valor òptim seria

$$x_2 = \begin{cases} \frac{a_{m-1,n} - a_{m,n-1}}{a_{m-1,n} + a_{m,n-1}} : a_{m-1,n} \geq a_{m,n-1} \\ 0 : \text{altrament} \end{cases}$$

I si apostés, els diners finals també serien $\left(\frac{a_{m,n-1}^{-1} + a_{m-1,n}^{-1}}{2}\right)^{-1}$.

Combinant els dos, ens dona que l'estratègia òptim és el següent: apostem

$$\frac{|a_{m-1,n} - a_{m,n-1}|}{a_{m-1,n} + a_{m,n-1}}$$

al 1r jugador si $a_{m,n-1} \geq a_{m-1,n}$ i al 2n jugador si no, i els profits finals en el pitjor dels casos compleix

$$a_{mn}^{-1} = \frac{a_{m,n-1}^{-1} + a_{m-1,n}^{-1}}{2}.$$

Ara, sigui $b_{mn} = 2^{mn}a_{mn}^{-1}$. Aleshores, la recursió per a_{mn} es converteix en

$$b_{mn} = b_{m-1,n} + b_{m,n-1}.$$

I la condició inicial $a_{00} = 1$ ens diu que $b_{00} = 1$.

Definim $c_{kn} = b_{k-n,n}$ per $0 \leq n \leq k$. Aleshores tenim $c_{00} = 1$ i $c_{kn} = c_{k-1,n} + c_{k-1,n-1}$. Coneixem que els coeficients binomials compleixen aquesta recursió i condició inicial; per tant, $c_{k,n} = \binom{k}{n} \Rightarrow b_{mn} = \binom{m+n}{m} \Rightarrow a_{mn} = \frac{2^{m+n}}{\binom{m+n}{m}}$

Ara, sabem que els coeficients binomials $\binom{k}{n}$, fixats k són bimodals, creixents per $n < \frac{k}{2}$ i decreixents per $n > \frac{k}{2}$. Per tant, la seqüència $a_{k-n,n}$, $0 \leq n \leq k$ és decreixent per $n < \frac{k}{2}$ i creixent per $n > \frac{k}{2}$. És a dir, $a_{m-1,n} \geq a_{m,n-1}$ si $n \geq m$ i $a_{m,n-1} \geq a_{n-1,m}$ si $m \geq n$.

L'estratègia guanyadora doncs és apostar

$$\frac{|a_{m-1,n} - a_{m,n-1}|}{a_{m-1,n} + a_{m,n-1}} = \frac{|b_{m-1,n} - b_{m,n-1}|}{b_{m-1,n} + b_{m,n-1}} = \frac{|\binom{m+n-1}{m} - \binom{m+n-1}{n}|}{\binom{m+n-1}{m} + \binom{m+n-1}{n}}$$

al jugador al què li queden més partides per guanyar.