
EMPLOYMENT / JOB APPLICATION

PERSONAL INFORMATION

FULL NAME: *Pica Pica Melanotos* **DATE:** Hoy
ADDRESS: C/ Rama de Mi Nido, s/n, Ribera del Ebro, Urraquia 26004
O-MAIL (Owl-mail): urraquitariojanita@hedwig.ur **PHONE:** Pío XI
SOCIAL SECURITY NUMBER (SSN): 825-753-601
DATE AVAILABLE: Cuando quieras, papi.
DESIRED PAY: \$ Lo mismo que Gisela. ☐ HOUR ☒ SALARY
POSITION APPLIED FOR: Urraca
EMPLOYMENT DESIRED: ☐ FULL-TIME ☐ PARTIAL ☒ SEASONAL

EMPLOYMENT ELIGIBILITY

ARE YOU A U.S. CITIZEN? ☐ YES ☐ NO* ☒ ASK DONALD J. TRUMP
*** IF NO, ARE YOU ALLOWED TO WORK IN THE U.S.?** ☐ YES ☐ NO
HAVE YOU EVER WORKED FOR THIS EMPLOYER? ☐ YES* ☐ NO
☒ NI SIQUIERA CONOZCO AL DE RECURSOS HUMANOS Y/O AVIARIOS
*** IF YES, WRITE THE START AND END DATES:**
HAVE YOU EVER BEEN CONVICTED OF A FELONY? ☒ YES* ☐ NO
*** IF YES, PLEASE EXPLAIN:** ¿Por qué querías que te explique cómo ocultar $|\mathbb{R}|$ cadáveres?

EDUCATION

HIGH SCHOOL: Musical	CITY/STATE: Urracópolis/Urraquia
FROM: Polluelo	TO: Urraca
GRADUATE: ☒ YES ☐ NO	DIPLOMA: Ploma
COLLEGE: UniRisas	CITY/STATE: Fuengirola/Burkina Faso
FROM: Urraca	TO: Urraca profesional
GRADUATE: ☒ YES ☐ NO	DEGREE: Sexagesimal

Problema 6 – Lista 4. Supongamos que el supremo es finito. Es decir, existe un número real $M > 0$ tal que:

$$\sup_n \sup_{x \in [-1, 1]} |p'_n(x)| = M < \infty$$

Esto significa que las derivadas de todos los polinomios están uniformemente acotadas por M en el intervalo $[-1, 1]$. Entonces, para cualquier polinomio p_n y para cualquier $x \in [-1, 1]$, se cumple que:

$$|p_n(x) - p_n(0)| \leq M|x - 0| = M|x|$$

Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ en la desigualdad anterior para un $x \neq 0$ fijo, obtenemos:

$$|0 - 1| \leq M|x| \implies 1 \leq M|x|$$

Sin embargo, si tomamos un x arbitrariamente cercano a 0 como $x = \frac{1}{2M}$, tenemos $1 \leq 1/2$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, la suposición inicial es falsa y,

$$\sup_n \sup_{x \in [-1, 1]} |p'_n(x)| = \infty$$

Como ejemplo de este tipo de polinomios, podemos considerar los desarrollos de Taylor de las funciones e^{-nx^2} truncados en grado $2n^2$ (el n^2 -ésimo término de la serie).

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n^2} \frac{(-n)^j}{j!} x^{2j}$$

Calculamos el error de esta serie

$$e^{-nx^2} = p_n(x) + e^{\xi} \frac{(-nx^2)^{n^2+1}}{(n^2+1)!}, \text{ para algún } \xi \in (-nx^2, 0)$$

Como ξ está entre $-nx^2$ y 0, el valor máximo que puede tomar e^{ξ} es 1. Por tanto el error absoluto cometido sería

$$\left| e^{\xi} \frac{(-nx^2)^{n^2+1}}{(n^2+1)!} \right| \leq \frac{(nx^2)^{n^2+1}}{(n^2+1)!} \sim \frac{n^{n^2+1} (x^2)^{n^2+1} e^{n^2+1}}{(n^2+1)^{n^2+1} \sqrt{2\pi(n^2+1)}} \sim \left(\frac{C}{n} \right)^{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Luego el límite de nuestros polinomios existe puntualmente y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx^2} = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Justo como se nos requería. Obsérvese que la pendiente de las funciones $p_n(x)$ en un entorno de $x = 0$ se van haciendo cada vez más pronunciadas (la campana e^{-nx^2} es cada vez más estrecha); en consecuencia, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ n \rightarrow \infty}} p'_n(x) &= +\infty, & \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ n \rightarrow \infty}} p'_n(x) &= -\infty, \\ \sup_n \sup_{x \in [-1, 1]} |p'_n(x)| &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} |p'_n(x)| = \infty \end{aligned}$$