

Solució Ego Teatral

Bernat Pagès

March 4, 2026

1. [LLISTA 5] Persona A està situada a $x = 0$ i persona B a $x = 1$. Les dues persones volen trobar-se però tenen unes muntanyes entre mig descrites per una funció contínua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ amb $f(0) = f(1) = 0$. Per a quines funcions f pots aconseguir que A i B es trobin si volen estar a la mateixa alçada en tot moment?

Solution:

Formalment, volem parametritzacions contínues $l, r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(l(t)) = f(r(t))$ i $l(0) = 0, r(0) = 1, l(1) = r(1)$. Resoldrem el problema per a funcions que no contenen segments plans.

Espamejarem el següent paper:

ABSTRACT. We show that two climbers can climb a mountain in such a way that at each moment they are at the same height above the sea level, supposing that the mountain has no plateau. That is, if f and g are continuous functions mapping $[0, 1]$ to $[0, 1]$ with $f(0) = g(0) = 0$ and $f(1) = g(1) = 1$, and if neither f nor g has an interval of constancy then there exist continuous functions k and $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ satisfying $k(0) = h(0) = 0$, $k(1) = h(1) = 1$, and $f \circ k = g \circ h$.

<https://scispace.com/pdf/the-mountain-climbers-problem-4hkoro7den.pdf>

Cada cop que tinguem un subproblema en l'interval $[l, r]$ amb $\arg \min_{[l, r]} f \in \{l, r\}$ o $\arg \max_{[l, r]} f \in \{l, r\}$ ho podem resoldre fent servir el paper. La reducció és la següent: suposem WLOG que es dona l'argmin. Llavors ens agafem un màxim global qualsevol $f(x_0) = M$ i les usem les funcions del paper en $[0, x_0]$ i en $[x_0, 1]$ transposat i fent la homotècia perquè tinguin altura 1 i amplada 1.

Suposem que hi ha almenys dos màxims globals iguals, $f(l), f(r)$ (el primer i l'últim). Llavors separem el problema en anar de 0 a l i de 1 a r , i llavors resoldre per $[l, r]$. El segon es pot fer fent servir el lema cap per avall. Per tant eliminant l'interval $[l, r]$ de la funció podem assumir que hi ha un únic màxim M .

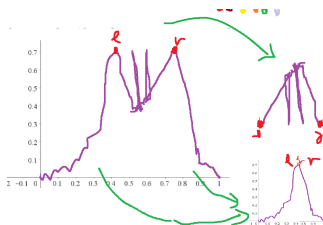


Figure 1: Enter Caption

Donarem una condició necessària i suficient per a que existeixin:

$l, r : (0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(l(t)) = f(r(t))$ i $\lim_{t \rightarrow 0} l(t) = 0, \lim_{t \rightarrow 0} r(t) = 1, l(1) = r(1)$.

Que extenent per continuïtat conclou l'enunciat.

Definim $a_0 = b_0 = \arg \max f$. Sigui la seqüència

$$a_n = \begin{cases} \arg \max_{[0, a_{n-1}]}^- f, & 2 \mid n, \\ \arg \min_{[0, a_{n-1}]}^- f, & 2 \nmid n. \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} \arg \max_{(b_{n-1}, 1]}^+ f, & 2 \mid n, \\ \arg \min_{(b_{n-1}, 1]}^+ f, & 2 \nmid n. \end{cases}$$

On $-$ i $+$ volen dir el de més a l'esquerra o el de més a la dreta si n'hi ha més d'un.

Lavors la funció f és vàlida si i només si les seqüències a i b són iguals.

Proof. Primer demostrem que la successió està ben definida. Ha d'existir un primer màxim global perquè si n'existeixen infinits, hi ha un punt d'acumulació però el punt d'acumulació ha de ser un màxim també. Així doncs a i b estan ben definits.

S'han d'acabar trobant a_0 . Sigui a_1, b_1 definits com abans. Si $a_1 = 0$ i $b_1 = 1$ hem acabat (fent servir el paper). Si $f(a_1) \neq f(b_1)$ hem acabat també perquè els mínims han de ser iguals. Si són iguals, resollem amb el paper $[a_1, a_0] \cup [b_0, b_1]$ i ens cal resoldre $[0, a_1] \cup [b_1, 1]$. Podem "enganxar" a_1 amb b_1 i assumir que la funció té un únic mínim global.

Reiterant aquest mateix argument veiem que és necessari que les dues successions siguin iguals. Però el Paper ens va construïnt els intervals $[a_n, a_{n+1}]$ i $[b_n, b_{n+1}]$. Sigui $L = \lim a_n$ i $R = \lim b_n$. Tenim condició necessària i suficient d'existència en l'interval (L, R) (i extenent al límit també a $[L, R]$).

Demostrem que $L = 0$ (similarment $R = 1$): Suposem que convergeix a un valor $x > 0$. Llavors tots els màxims globals se situen a la dreta de x i la successió $f(a_n)$ convergeix a $f(x)$ per tant $f(x) = f(0)$ i $[0, x]$ és pla (contradicció).