

25. Calcul I

Demostrarem que $L = \frac{e}{e-1}$. Per a fer-ho, considerem la funció misteriosa

$$F(x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x) = -\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} (-x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n-1}$$

El que farem servir d'aquesta funció és que el radi de convergència és 1 (ja que $\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$), i que és contínua i creixent en $(0, 1)$.

En primer lloc, notem que $2i \geq i+1$ per a tot $i \geq 1$. Usant això i la fórmula general, tenim que per a $n-1 \geq 1$:

$$a_n - a_{n-1} = \sum_{j=2}^n \frac{a_{n-j}}{j} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{n-1-i}}{i+1} \geq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{n-1-i}}{2i} = \frac{a_{n-1}}{2}$$

Per tant, $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \frac{3}{2}$ per a $n \geq 2$. Això en particular ens demostra un creixement exponencial per a a_n , cosa que implica no fitada.

Direm que m és una pseudo-fita inferior si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq m - \varepsilon$. Similarment, M és una pseudo-fita superior si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq M + \varepsilon$. Com que $\frac{3}{2}$ és una fita inferior, també és una pseudo-fita inferior.

Ara el que farem és generar pseudo-fites superiors a partir de pseudo-fites inferiors i viceversa. Si m és una pseudo-fita inferior, veurem que $F\left(\frac{1}{m}\right)$ és una pseudo-fita superior. Per a això, ens donen un ε , i escollim primer δ tal que $F\left(\frac{1}{m-\delta}\right) < F\left(\frac{1}{m}\right) + \frac{\varepsilon}{2}$, que podem fer per continuïtat. Per la definició de pseudo-fita, existeix N tal que $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq m - \delta$ per a tot $n \geq N$. Finalment, escollim N' tal que $\frac{a_{N-1} + \dots + a_0}{a_{n-1}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ per a $n \geq N_2$, que podem fer perquè el numerador és constant i el denominador tendeix a infinit.

Amb tot això, si $n \geq \max\{1, N, N'\}$,

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-2}}{2a_{n-1}} + \frac{a_{n-3}}{3a_{n-1}} + \dots + \frac{a_N}{(n-N)a_{n-1}} + \frac{a_{N-1}}{(n-N+1)a_{n-1}} + \dots + \frac{a_0}{na_{n-1}} \leq \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m-\delta} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{m-\delta} \right)^2 + \dots + \frac{1}{n-N} \left(\frac{1}{m-\delta} \right)^{n-N-1} + \frac{a_{N-1} + \dots + a_0}{a_{n-1}} \leq \\ &\leq F\left(\frac{1}{m-\delta}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \leq F\left(\frac{1}{m}\right) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = F\left(\frac{1}{m}\right) + \varepsilon \end{aligned}$$

Similarment, i potser més senzillament, si M és una pseudo-fita superior, $F\left(\frac{1}{M}\right)$ serà una pseudo-fita inferior. Si ens donen ε , agafem δ tal que $F\left(\frac{1}{M+\delta}\right) \geq F\left(\frac{1}{M}\right) - \frac{\varepsilon}{2}$ i escollim N tal que $\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq M + \delta$ per a tot $n \geq N$. A més, agafarem un N' tal que per a tot $n - N \geq N'$, $\sum_{j=1}^{n-N} \frac{1}{j} \left(\frac{1}{M+\delta}\right)^{j-1} \geq F\left(\frac{1}{M+\delta}\right) - \frac{\varepsilon}{2}$, que existeix per la convergència de la sèrie.

Amb tot això, si $n \geq \max\{1, N + N'\}$,

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-2}}{2a_{n-1}} + \frac{a_{n-3}}{3a_{n-1}} + \cdots + \frac{a_N}{(n-N)a_{n-1}} + \frac{a_{N-1}}{(n-N+1)a_{n-1}} + \cdots + \frac{a_0}{na_{n-1}} \geq \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M+\delta}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{M+\delta}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n-N} \left(\frac{1}{M+\delta}\right)^{n-N-1} + 0 \geq \\ &\geq F\left(\frac{1}{M+\delta}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \geq F\left(\frac{1}{M}\right) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = F\left(\frac{1}{M}\right) - \varepsilon \end{aligned}$$

Ara el que cal veure és que les pseudo-fites que obtenim iterant la coneguda $\frac{3}{2}$ ens porten enlloc. Per això, ens cal saber una mica el comportament de $G(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= -\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1 - \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = -\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x-1} \\ G''(x) &= -\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x - (x-1)}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x(x-1)^2} \end{aligned}$$

Observem que per a $x > 1$, $G'(x) < 0$ i $G''(x) > 0$. La segona és immediata i la primera ve de

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x}\right)^n < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{x-1}$$

Un cop ens adonem que $G'\left(\frac{3}{2}\right) = \ln 3 - 2$ i que

$$G\left(\frac{e}{e-1}\right) = -\frac{e}{e-1} \ln\left(1 - \frac{e-1}{e}\right) = -\frac{e}{e-1} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e}{e-1},$$

ja gairebé estem, perquè el fet que $G''(x) > 0$ ens diu que

$$-1 = \ln e - 2 < \ln 3 - 2 = G'\left(\frac{3}{2}\right) \leq G'(x) < 0 \quad \forall x \in \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$$

Per tant, G és contractiva, és a dir, $|G(x) - G(y)| < |x - y| \quad \forall x, y \in \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$. Ara,

$$m_1 = \frac{3}{2} < \frac{e}{e-1} \implies M_1 = G\left(\frac{3}{2}\right) > G\left(\frac{e}{e-1}\right) = \frac{e}{e-1}, \quad \frac{e}{e-1} - m_1 > M_1 - \frac{e}{e-1}$$

Llavors,

$$m_2 = G(M_1) < \frac{e}{e-1}, \quad \frac{e}{e-1} - m_2 < M_1 - \frac{e}{e-1} < \frac{e}{e-1} - m_1$$

Similarment,

$$M_2 = G(m_2) > \frac{e}{e-1}, \quad M_2 - \frac{e}{e-1} < \frac{e}{e-1} - m_2 < M_1 - \frac{e}{e-1}$$

i així consecutivament.

Hem construït dues successions $m_1, m_2, m_3, \dots$ i $M_1, M_2, M_3, \dots$ tals que la primera és creixent i tendint al (necessàriament únic) punt fix de l'interval, que és $\frac{e}{e-1}$ i la segona decreixent amb el mateix límit. Per construcció, tots els termes de la primera successió són pseudo-fites inferiors i tots els membres de la segona són pseudo-fites superiors.

Ara per fi estem en condicions de demostrar el problema: per a tot ε , podem escollir i tal que $M_i < \frac{e}{e-1} + \frac{\varepsilon}{2}$. Per definició de pseudo-fita superior, existeix un N_1 tal que per a tot $n \geq N_1$, $\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq M_i + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{e}{e-1} + \varepsilon$. Per altra banda, escollim j tal que $m_j > \frac{e}{e-1} - \frac{\varepsilon}{2}$. Per definició de pseudo-fita inferior, existeix un N_2 tal que per a tot $n \geq N_2$, $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq m_j - \frac{\varepsilon}{2} > \frac{e}{e-1} - \varepsilon$. Per tant, escollint $N = \max\{N_1, N_2\}$, satisfem la definició de límit i concloem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{e}{e-1}$$

Three Men Orchestra