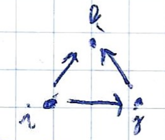
34. Spotters   Carlos Mazeriego ✡

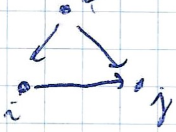
Interpretaremos que las ternas (i,j,k) no son ternas ordenadas (esto es, con 3 gymbros tales que $1 \to 2 \to 3 \to 1$ consideramos que las ternas $(1,2,3)$, $(2,3,1)$ y $(3,1,2)$ son la misma, y que cada gymbro solo consigue levantar 1kg adicional; si considerásemos que $(1,2,3)$, $(2,3,1)$ y $(3,1,2)$ son distintas, entonces cada gymbro podría levantar 3 kg adicionales). Pese a seguir esta interpretación del enunciado, lo que establezcamos también sería válido para la otra versión (simplemente habría que multiplicar el resultado por 3, pues contaríamos cada ciclo dirigido de longitud 3 tres veces).

Sea G el grafo cuyos vértices son los gymbros y cuyas aristas dirigidas vienen dadas por las relaciones de spottear. El ~~más~~ peso total extra que pueden levantar entre todos los gymbros es el triple del número de ciclos dirigidos de longitud 3 en G. Para un vértice $i \in \{1,\dots,2n+1\}$, decimos que $\{j,k\} \subseteq \{1,\dots,2n+1\} \setminus \{i\}$ es una pareja buena si y solo si $i \to j$ y $k \to i$. Vemos que si una terna $\{i,j,k\}$ cumple la condición del enunciado entonces $\{j,k\}$ es buena respecto a i, $\{k,i\}$ es buena respecto a j y $\{i,j\}$ es buena respecto a k. Por otra parte, si $\{i,j,k\}$ no cumple la condición del enunciado, se da una de estas situaciones: (asumiendo SPG que ordenamos i,j,k de modo que $i \to j$)



- $\{i,k\}$ es buena respecto a j
- Ni $\{j,k\}$ respecto a i ni $\{i,j\}$ respecto a k lo son

- $\{i,j\}$ es buena respecto a k
- Ni $\{i,k\}$ respecto a j ni $\{j,k\}$ respecto a i lo son



- $\{j,k\}$ es buena respecto a i
- Ni $\{i,j\}$ respecto a k ni $\{i,k\}$ respecto a j lo son

Entonces cada una de las $\binom{2n+1}{3} = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ ~~tripas~~ ternas no ordenadas (i,j,k) corresponde con exactamente 1 pareja ~~terna~~ $(u, \{v,w\})$ tal que $\{v,w\}$ es buena respecto a u (siendo u,v,w i,j,k en algún orden) si no ~~es un ciclo dirigido~~ hay un ciclo dirigido $i \to j \to k \to i$, y con exactamente 3 parejas de dicha forma si sí que hay un ciclo dirigido $i \to j \to k \to i$. Como cada pareja de estas es contada, a lo sumo, desde una terna, es inmediato que el número de ciclos de longitud 3 es $\frac{B - \binom{2n+1}{3}}{2}$, siendo B el número de parejas $(u, \{v,w\})$ tales que $\{v,w\}$ es u-buena.

Entonces, $3 \frac{B - \binom{2n+1}{3}}{2}$ es el peso extra que pueden levantar los gymbros.

Fijémonos, llamando indeg v al número de aristas dirigidas de G de la forma $x \to v$ y outdeg v a las de la forma $v \to x$ (con, evidentemente, $\text{indeg } v + \text{outdeg } v = 2n \quad \forall v \in \{1, \dots, 2n+1\}$), en que el número de parejas buenas respecto a $v \in \{1, \dots, 2n+1\}$ es indeg $v \cdot$ outdeg v. Luego:

$$B = \sum_{v=1}^{2n+1} \text{indeg } v \cdot \text{outdeg } v = \sum_{v=1}^{2n+1} \left(\left(\sqrt{\text{indeg } v \cdot \text{outdeg } v} \right)^2 \right) \underset{AM-GM}{\leq}$$

$$\underset{AM-GM}{\leq} \sum_{v=1}^{2n+1} \left(\left(\frac{\text{indeg } v + \text{outdeg } v}{2} \right)^2 \right) = \sum_{v=1}^{2n+1} \left(\left(\frac{2n}{2} \right)^2 \right) = \sum_{v=1}^{2n+1} n^2 = n^2(2n+1)$$

Con igualdad si y solo si indeg v = outdeg v $\forall v \in \{1, \dots, 2n+1\}$. Así que el peso extra total $P = 3 \frac{B - \binom{2n+1}{3}}{2}$ satisface:

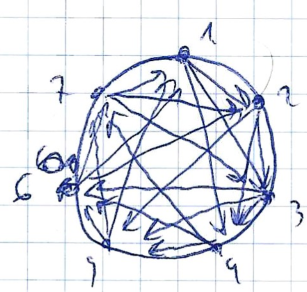
$$P = 3 \frac{B - \binom{2n+1}{3}}{2} \leq 3 \frac{n^2(2n+1) - \frac{1}{3} n(2n-1)(2n+1)}{2} = \frac{3n - (2n-1)}{2} n(2n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

Con igualdad si y solo si $\operatorname{indeg} v = \operatorname{outdeg} v \quad \forall v \in \{1,2,\dots,2n+1\}$.
Una forma de obtener la igualdad es tomando $i \to j$ si y solo $\exists\, r \in \{1,2,\dots,n\}$ tal que $j - i \equiv r \pmod{2n+1}$, pues entonces $\operatorname{indeg} v = n = \operatorname{outdeg} v \quad \forall v \in \{1,2,\dots,2n+1\}$ (esto equivale a disponer $1,2,\dots,2n+1$ en una circunferencia como si fueran los vértices de un $(2n+1)$-ágono regular y para cada par $\{i,j\}$ considerar el arco de circunferencia más corto y tomar $i \to j$ si al recorrer ese arco de circunferencia i va antes que j, y $j \to i$ en caso contrario; es evidente que por simetría $\operatorname{indeg} v = \operatorname{outdeg} v \quad \forall v \in \{1,2,\dots,2n+1\}$).

Por tanto, el máximo peso total que pueden levantar es $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$ kg.
Además, (*) en la construcción dada cada gymbro levanta exactamente $\frac{n(n+1)}{2}$ kg extra -por simetría-.

*Nota: Considerando ordenados los (i,j,k) del enunciado, tendríamos que multiplicar por 3 los resultados anteriores, obteniéndose un peso máximo total de $\frac{3n(n+1)(2n+1)}{2}$ kg.



$1\to2,\ 1\to3,\ 1\to4$
$2\to3,\ 2\to4,\ 2\to5$
$3\to4,\ 3\to5,\ 3\to6$
$4\to5,\ 4\to6,\ 4\to7$
$5\to6,\ 5\to7,\ 5\to1$
$6\to7,\ 6\to1,\ 6\to2$
$7\to1,\ 7\to2,\ 7\to3$

(*) Ejemplo para $n=3$ de la construcción dada