

Problema 42.

ENCURTIDOS VILLAREAL

March 3, 2026

Geo :)

Veure pàgina final per als dos dibuixos i el meu retrat. Primer veiem que les boles reboten com es demana. Això equival al següent factou de geo d'olimpiada conegut.

Lemma 0.1

Sigui Γ una elipse de focus a i b , i $p \in \Gamma$. Llavors la bisectriu exterior de l'angle $\angle apb$ és tangent a la elipse.

Això ens diu que si la bola va de a cap a p i rebot a p , llavors anirà cap a b . Paso de demostrar el lemma perquè és conegut, però puc donar un sketch d'una demo. La elipse és una corba de nivell per la funció $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ via $f: x \mapsto \|x - a\|_2 + \|x - b\|_2$. Llavors, només cal veure que el gradient de f en x segueix la direcció de la bisectriu interior de $\angle axb$. La raó d'això és que si x és mou en direcció que forma un angle θ amb xa , llavors la derivada de $\|x - a\|_2$ és proporcional a $\cos(\theta)$. Llavors el lemma es redueix a veure que $\cos(x) \cos(t - x)$ (on $t = \angle axb$) es minimitza a $t = \frac{\pi}{2}$. Això és un exercici de calcul 1.

Ara que ja sabem com es mou la bola, fem el problema. Segurament hi ha alguna manera full pussy no-geomètrica de fer això, però com chads que som ho farem geomètricament. (Escalfament pel problemsetting de l'any vinent)

Fixa la elipse Γ , digali A i B als focus, K i L a les interseccions de AB amb Γ , amb K, A, B, L en aquest ordre. Definim $f: \Gamma \rightarrow \Gamma$ com la projectivitat que envia X a la reflexió respecte la mediatriu de AB de $AX \cap \Gamma$. Nota que això és la composició de una projectivitat de centre A i una de centre ∞_{AB} . Veurem que per tot $X \in \Gamma$, $f^n(X)$ tendeix a L si $n \rightarrow \infty$ excepte si $X = K$, en qual cas clarament $f^n(K) = K$. Això clarament implica el problema, ja que ens diu que la bola tendeix a rebotar de banda a banda entre K i L .

La idea és baixar aquesta projectivitat a una recta. En particular, sigui ℓ la mediatriu de AB . Tal com es mostra al dibuix, podem considerar la projectivitat $g: \ell \rightarrow \ell$ via

$$g: P \mapsto X \xrightarrow{f} Y \mapsto Q.$$

Aquestes dues fletxes sense label són projeccions de centre L . El nostre problema ara equival a veure que tota òrbita de g va o al punt de l'infinit o a $R = \ell \cap AB$. De fet veurem que totes van al infinit excepte l'òrbita de R , que és punt fix. Això seguirà fàcilment d'aquest claim.

Claim. Tenim que, per tot P , $Q = g(P)$, el ratio PR/QR és constant (incloent el signe).

Ara podem fer el següent. Notem que

$$\frac{PR}{QR} = (R, \infty_{PQ}; P, Q) \stackrel{L}{=} (K, L; X, Y) = \frac{KX \cdot LY}{KY \cdot LX} = \frac{KX \cdot KZ}{LZ \cdot LX}$$

$$\frac{KX \cdot KZ}{LZ \cdot LX} = \frac{KX}{LZ} \cdot \frac{KZ}{LX} = \frac{AK}{AZ} \cdot \frac{AZ}{AL} = \frac{AK}{AL},$$

Amb el claim acabar és trivial, ja que ens diu exactament quí és la transformació g : és una homotècia de centre R i raó fixa r . Llavors està clar el resultat: si $r > 1$, totes les òrbites van al punt del infinit, si $r < 1$, totes van a R . $r \neq 1$ és senzill de comprovar prenent un valor concret de X , per exemple, que estigui en el semieix menor. De fet, aquest mateix exemple mostra que $r > 1$. Això implica que totes les òrbites de g van al infinit de ℓ , per suposat amb l'excepció de $X = R$, que és fix. Per tant hem acabat.



