

— URracas del Ebro —

Universidad de La Rioja

Problema 6 – Lista 5. Partiendo de la relación:

$$a_{n+1} - 2a_n = \sqrt{3a_n^2 + 1}$$

Elevando al cuadrado:

$$\begin{aligned} (a_{n+1} - 2a_n)^2 &= 3a_n^2 + 1 \\ a_{n+1}^2 - 4a_na_{n+1} + 4a_n^2 &= 3a_n^2 + 1 \\ a_{n+1}^2 - 4a_na_{n+1} + a_n^2 &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Si desplazamos el índice n , obtenemos:

$$a_n^2 - 4a_na_{n-1} + a_{n-1}^2 = 1 \tag{2}$$

Restando ambas:

$$\begin{aligned} (a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2) - 4a_n(a_{n+1} - a_{n-1}) &= 0 \\ (a_{n+1} - a_{n-1})(a_{n+1} + a_{n-1}) - 4a_n(a_{n+1} - a_{n-1}) &= 0 \\ (a_{n+1} - a_{n-1})(a_{n+1} + a_{n-1} - 4a_n) &= 0 \end{aligned}$$

Como la sucesión es estrictamente creciente, $a_{n+1} \neq a_{n-1}$, por lo que podemos dividir entre $(a_{n+1} - a_{n-1})$, obteniendo:

$$a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$$

La ecuación característica de la recurrencia es:

$$r^2 - 4r + 1 = 0$$

Resolviéndola, obtenemos las raíces $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ y $\beta = 2 - \sqrt{3}$. Y con las condiciones iniciales $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ obtenemos:

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{2\sqrt{3}}$$

Veamos por inducción que todos los a_n son enteros. Si $n = 2k$ y definiendo $b_k = \alpha^k + \beta^k$, tenemos:

$$a_{2k} = \frac{\alpha^{2k} - \beta^{2k}}{2\sqrt{3}} = \left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{2\sqrt{3}} \right) (\alpha^k + \beta^k) = a_k \cdot b_k$$

Como α y β son raíces de $r^2 - 4r + 1 = 0$, se tiene que b_k es también una sucesión entera que cumple $b_{k+1} = 4b_k - b_{k-1}$ con $b_0 = 2$ y $b_1 = 4$. Para $k = 1$, $a_2 = 4$ que claramente no es primo. Para $k \geq 2$, a_{2k} es producto de dos enteros estrictamente mayores que 1, por lo que ningún a_{2k} es primo.

Si $n = 2k + 1$, teniendo en cuenta que $\alpha = 2 + \sqrt{3} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}$ y $\beta = 2 - \sqrt{3} = \frac{(1-\sqrt{3})^2}{2}$, tenemos:

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (\alpha \cdot \alpha^{2k} - \beta \cdot \beta^{2k}) \\ a_{2k+1} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2} \alpha^{2k} - \frac{(1-\sqrt{3})^2}{2} \beta^{2k} \right) \\ a_{2k+1} &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \left([(1+\sqrt{3})\alpha^k]^2 - [(1-\sqrt{3})\beta^k]^2 \right) \\ a_{2k+1} &= \left(\frac{(1+\sqrt{3})\alpha^k - (1-\sqrt{3})\beta^k}{2\sqrt{3}} \right) \left(\frac{(1+\sqrt{3})\alpha^k + (1-\sqrt{3})\beta^k}{2} \right) \end{aligned}$$

Llamando C_k al primer factor y D_k al segundo, ambos satisfacen la relación de recurrencia $x_{k+1} = 4x_k - x_{k-1}$ por ser combinaciones lineales de α^k y β^k . Además, $C_0 = 1$, $C_1 = 3$, $D_0 = 1$ y $D_1 = 5$, por lo que C_k y D_k son siempre enteros.

Como $a_{2k+1} = C_k \cdot D_k$ y para todo $k \geq 1$, $C_k \geq 3$ y $D_k \geq 5$, ningún a_{2k+1} es primo.



Figura 1: Menorquín promedio