

L'estratègia de l'Ángeles en realitat són dues estratègies sobre què farà si treu un 0 i què farà si treu un

1. Suposem que l'Ángeles dirà $x = \lambda$ amb densitat de probabilitat ℓ_λ^0 i ℓ_λ^1 , on $\int_{-\infty}^{\infty} \ell_\lambda^0 d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \ell_\lambda^1 d\lambda = 1$.

Similarment, en Bernat dirà $y = \mu$ amb unes probabilitats que dependran de la seva moneda: m_μ^0 i m_μ^1 amb $\int_{-\infty}^{\infty} m_\mu^0 d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} m_\mu^1 d\mu = 1$.

El guany d'en Bernat, des del punt de vista d'en Bernat, depèn de si ha tret un 1 o no, i és

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(G_B \mid b = 0) &= (1 - p) \cdot \mathbb{E}(G_B \mid a = 0, b = 0) + p \cdot \mathbb{E}(G_B \mid a = 1, b = 0) = \\ &= (1 - p) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(G_B \mid x = \lambda, y = \mu, a = 0, b = 0) \cdot \ell_\lambda^0 d\lambda \right) m_\mu^0 d\mu + \\ &\quad + p \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(G_B \mid x = \lambda, y = \mu, a = 1, b = 0) \cdot \ell_\lambda^1 d\lambda \right) m_\mu^0 d\mu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(G_B \mid b = 1) &= (1 - p) \cdot \mathbb{E}(G_B \mid a = 0, b = 1) + p \cdot \mathbb{E}(G_B \mid a = 1, b = 1) = \\ &= (1 - p) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(G_B \mid x = \lambda, y = \mu, a = 0, b = 1) \cdot \ell_\lambda^0 d\lambda \right) m_\mu^1 d\mu + \\ &\quad + p \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(G_B \mid x = \lambda, y = \mu, a = 1, b = 1) \cdot \ell_\lambda^1 d\lambda \right) m_\mu^1 d\mu\end{aligned}$$

$$\text{Substituïm } \mathbb{E}(G_B \mid x = \lambda, y = \mu) = \begin{cases} \frac{\lambda + \mu}{2} - a - b & \text{si } \lambda > \mu \\ 0 & \text{si } \lambda = \mu \text{ i tenim:} \\ a + b - \frac{\lambda + \mu}{2} & \text{si } \lambda < \mu \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(G_B \mid b = 0) &= (1 - p) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\mu} \left(-\frac{\lambda + \mu}{2} \right) \cdot \ell_\lambda^0 d\lambda + \int_{\mu}^{\infty} \left(\frac{\lambda + \mu}{2} \right) \cdot \ell_\lambda^0 d\lambda \right) m_\mu^0 d\mu + \\ &\quad + p \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\mu} \left(1 - \frac{\lambda + \mu}{2} \right) \cdot \ell_\lambda^1 d\lambda + \int_{\mu}^{\infty} \left(\frac{\lambda + \mu}{2} - 1 \right) \cdot \ell_\lambda^1 d\lambda \right) m_\mu^0 d\mu = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left((1 - p) \cdot \left(-\frac{\mu}{2} \right) \int_{-\infty}^{\mu} \ell_\lambda^0 d\lambda + (1 - p) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \int_{-\infty}^{\mu} \lambda \ell_\lambda^0 d\lambda + (1 - p) \cdot \left(\frac{\mu}{2} \right) \int_{\mu}^{\infty} \ell_\lambda^0 d\lambda + (1 - p) \cdot \left(\frac{1}{2} \right) \int_{\mu}^{\infty} \lambda \ell_\lambda^0 d\lambda + \right. \\ &\quad \left. + p \cdot \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) \int_{-\infty}^{\mu} \ell_\lambda^1 d\lambda + p \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \int_{-\infty}^{\mu} \lambda \ell_\lambda^1 d\lambda + p \cdot \left(\frac{\mu}{2} - 1 \right) \int_{\mu}^{\infty} \ell_\lambda^1 d\lambda + p \cdot \left(\frac{1}{2} \right) \int_{\mu}^{\infty} \lambda \ell_\lambda^1 d\lambda \right) m_\mu^0 d\mu = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left((1 - p) \cdot \left(-\frac{\mu}{2} \right) \cdot L_0(\mu) + (1 - p) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \widetilde{L}_0(\mu) + (1 - p) \cdot \left(\frac{\mu}{2} \right) \cdot (1 - L_0(\mu)) + (1 - p) \cdot \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \widetilde{L}_0(\mu) + \right. \\ &\quad \left. + p \cdot \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) \cdot L_1(\mu) + p \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \widetilde{L}_1(\mu) + p \cdot \left(\frac{\mu}{2} - 1 \right) \cdot (1 - L_1(\mu)) + p \cdot \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \widetilde{L}_1(\mu) \right) m_\mu^0 d\mu =\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ((1-p)H_{00}(\mu) + pH_{10}(\mu)) m_{\mu}^0 d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} H_0(\mu) m_{\mu}^0 d\mu$$

on L_i , $\widetilde{L}_i$ i $\underline{L}_i$ són funcions conegudes (obtingudes de la distribucions) i H_0 és tot el carro de dins, que fixades les distribucions de l'Ángeles, només depèn de μ . Per a cada parella de distribucions de l'Ángeles, només hem de calcular la funció $H_0(\mu)$ i descobrir quina distribució d'en Bernat és la que ho maximitza. No obstant, com que la distribució no és més que una manera pedant de fer una mitjana, veiem que podem posar tot el pes en el màxim d'aquesta funció, i no ho podem fer millor, així que això és el que farà en Bernat en el cas de treure un 0 a la moneda. Esperarem a saber més coses de les distribucions de l'Ángeles per concretar quin nombre és el que dirà.

No repetirem el càlcul per concloure que en Bernat dirà un nombre amb probabilitat 1 també en el cas que tregui un 1, però sí que escrivim les funcions H_{ij} per futura referència.

$$\begin{aligned} H_{00}(\mu) &= -\frac{\mu}{2}L_0(\mu) - \frac{1}{2}\widetilde{L}_0(\mu) + \frac{\mu}{2}(1 - L_0(\mu)) + \frac{1}{2}\underline{L}_0(\mu) \\ H_{10}(\mu) &= \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)L_1(\mu) - \frac{1}{2}\widetilde{L}_1(\mu) + \left(\frac{\mu}{2} - 1\right)(1 - L_1(\mu)) + \frac{1}{2}\underline{L}_1(\mu) \\ H_{01}(\mu) &= \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)L_0(\mu) - \frac{1}{2}\widetilde{L}_0(\mu) + \left(\frac{\mu}{2} - 1\right)(1 - L_0(\mu)) + \frac{1}{2}\underline{L}_0(\mu) \\ H_{11}(\mu) &= \left(2 - \frac{\mu}{2}\right)L_1(\mu) - \frac{1}{2}\widetilde{L}_1(\mu) + \left(\frac{\mu}{2} - 2\right)(1 - L_1(\mu)) + \frac{1}{2}\underline{L}_1(\mu) \end{aligned}$$

Dit això, ara sabem que sigui quina sigui l'estratègia de l'Ángeles, en Bernat dirà un número μ_1^{ℓ} amb probabilitat q o un número μ_0^{ℓ} amb probabilitat $(1-q)$, que depenen de les distribucions de l'Ángeles. Des del punt de vista de l'Ángeles, el guany d'en Bernat depèn de la seva moneda, i és:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G_B \mid a = 0) &= (1-q) \cdot \mathbb{E}(G_B \mid a = 0, b = 0) + q \cdot \mathbb{E}(G_B \mid a = 0, b = 1) = \\ &= (1-q) \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(G_B \mid x = \lambda, y = \mu_0^{\ell}, a = 0, b = 0) \cdot \ell_{\lambda}^0 d\lambda + q \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(G_B \mid x = \lambda, y = \mu_1^{\ell}, a = 0, b = 1) \cdot \ell_{\lambda}^0 d\lambda = \\ &= (1-q) \int_{-\infty}^{\mu_0^{\ell}} \left(-\frac{\lambda + \mu_0^{\ell}}{2}\right) \cdot \ell_{\lambda}^0 d\lambda + (1-q) \int_{\mu_0^{\ell}}^{\infty} \left(\frac{\lambda + \mu_0^{\ell}}{2}\right) \cdot \ell_{\lambda}^0 d\lambda + \\ &\quad + q \int_{-\infty}^{\mu_1^{\ell}} \left(1 - \frac{\lambda + \mu_1^{\ell}}{2}\right) \cdot \ell_{\lambda}^0 d\lambda + q \int_{\mu_1^{\ell}}^{\infty} \left(\frac{\lambda + \mu_1^{\ell}}{2} - 1\right) \cdot \ell_{\lambda}^0 d\lambda = \\ &= (1-q) \cdot \left(-\frac{\mu_0^{\ell}}{2}\right) \cdot L_0(\mu_0^{\ell}) + (1-q) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \widetilde{L}_0(\mu_0^{\ell}) + (1-q) \cdot \left(\frac{\mu_0^{\ell}}{2}\right) \cdot (1 - L_0(\mu_0^{\ell})) + (1-q) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \underline{L}_0(\mu_0^{\ell}) + \\ &\quad + q \cdot \left(1 - \frac{\mu_1^{\ell}}{2}\right) \cdot L_0(\mu_1^{\ell}) + q \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \widetilde{L}_0(\mu_1^{\ell}) + q \cdot \left(\frac{\mu_1^{\ell}}{2} - 1\right) \cdot (1 - L_0(\mu_1^{\ell})) + q \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \underline{L}_0(\mu_1^{\ell}) = \\ &= (1-q)H_{00}(\mu_0^{\ell}) + qH_{01}(\mu_1^{\ell}) \end{aligned}$$

Similarment,

$$\mathbb{E}(G_B \mid a = 1) = (1-q)H_{10}(\mu_0^{\ell}) + qH_{11}(\mu_1^{\ell})$$

Ara és el moment de decidir com l'Ángeles pren les seves distribucions. Com que ho ha de desvelar, ho ha de fer abans de tirar la moneda. El que vol minimitzar, no és el guany d'en Bernat sota $a = 0$, ja que l'òptim d'aquest cas depèn de H_{10} i H_{11} via μ_0^{ℓ} i μ_1^{ℓ} , així que si minimitzés a cegues tindria una decent distribució quan

$a = 0$, però una horrible quan $a = 1$ perquè no l'ha pogut minimitzar. És per això que ella ha de minimitzar el guany total, que és:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(G_B) &= (1-p)\mathbb{E}(G_B \mid a=0) + p\mathbb{E}(G_B \mid a=1) = \\ &= (1-p) \left[(1-q)H_{00}(\mu_0^\ell) + qH_{01}(\mu_1^\ell) \right] + p \left[(1-q)H_{10}(\mu_0^\ell) + qH_{11}(\mu_1^\ell) \right] = \\ &= (1-q)H_0(\mu_0^\ell) + qH_1(\mu_1^\ell)\end{aligned}$$

I ara ens mirem molt fortament això i veiem que no sabem fer res més. Hem fet provatures amb distribucions constants i surt sida. Per si serveix, es pot demostrar que $|H_1(\mu) - H_0(\mu)| \leq 1$ (la diferència és $2L - 1$ per a certa funció de distribució acumulada L).

Si un va a per matrícula, i no ho aconsegueix, es queda a l'excel·lent?

Three Men Orchestra