58. Oda a l'honestedat

Three Men Orchestra.

En primer lloc, notem que la matriu de Vandermonde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_p^{p^2}$$ és invertible

amb inversa

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2^{p-2} & -3^{p-2} & -4^{p-2} & \cdots & -(-2)^{p-2} & -(-1)^{p-2} \\ 0 & -1 & -2^{p-3} & -3^{p-3} & -4^{p-3} & \cdots & -(-2)^{p-3} & -(-1)^{p-3} \\ 0 & -1 & -2^{p-4} & -3^{p-4} & -4^{p-4} & \cdots & -(-2)^{p-4} & -(-1)^{p-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & \cdots & -(-2) & -(-1) \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ja que la fila i amb la columna $\underset{\substack{\vee \\ 0}}{j}$ dona $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} -\left(\frac{i}{j}\right)^k = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{i}{j} = 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

(i $j = 0$ es comprova a part trivialment)

Suma de geomètrica

Suposa que $\sum_{k=0}^{p-1} k!\, n^k \neq 0$ per a $n = n_0, n_1, \dots, n_r$.

Aleshores

$$\begin{pmatrix} & & \\ & V & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (p-1)! \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \neq 0 \\ \\ \\ \leftarrow \neq 0 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \lambda_i e_{n_i}$$

És a dir,

$$\begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (p-1)! \end{pmatrix} = V^{-1} \cdot \sum_{i=0}^{r} \lambda_i e_{n_i} = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i V^{-1} e_{n_i}.$$

és una combinació lineal de les columnes de V^{-1}. Per a generar el $0!$, l'única manera és fer $n_0 = 1$ i $\lambda_0 = 1$, així que ens n'oblidem. Particularitzant en els nombres $1!, 2!, \dots, (p-2)!$, veiem que tots es poden escriure com a $K! = -\sum_{i=1}^{r} \lambda_i n_i^{p-1-K}$

Matriu $\frac{p-1}{2} \times \frac{p-1}{2}$

Considerem la matriu

$$F = \begin{pmatrix} 1! & 2! & 3! & 4! & \cdots \\ 2! & 3! & 4! & & \vdots \\ 3! & 4! & & & \vdots \\ 4! & & & \cdots & (p-2)! \\ \vdots & & & & \end{pmatrix} = -\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \begin{pmatrix} n_i^{p-2} & n_i^{p-3} & n_i^{p-4} & \cdots & \\ n_i^{p-3} & n_i^{p-4} & & & \vdots \\ n_i^{p-4} & & \ddots & & \\ \vdots & & & & n_i^2 \\ & & \cdots & n_i^2 & n_i \end{pmatrix}.$$

Com podem observar, l'hem escrita com a suma de r matrius, que resulta que són de rang 1 (Cada menor 2×2 és trivialment 0). Per la desigualtat triangular de la funció rang, tenim rang $F \leq r$. Acabarem demostrant que F és invertible, així que $\frac{p-1}{2} \leq r$, i afegint-hi l'n_0 d'abans, serà un total de $r+1 \geq \frac{p+1}{2}$ valors no nuls.

Per a veure que F és invertible, farem un seguit de transformacions elementals. Comencem dividint les files i les columnes per factorials:

$$\begin{array}{c} F_0 \rightarrow \\ \\ \\ \\ \\ F_{\frac{p-1}{2}-1} \rightarrow \end{array}
\begin{pmatrix} 1! & 2! & 3! & \cdots & \frac{p-1}{2}! \\ 2! & 3! & & & \vdots \\ 3! & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{p-1}{2}! & \cdots & & & (p-2)! \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & & & & \uparrow \\ C_0 & & & & C_{\frac{p-1}{2}-1} \end{array}$$

$$\xrightarrow[F'_i = \frac{F_i}{(i+1)!}]{C'_j = \frac{C_j}{j!}}
\begin{pmatrix} \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \cdots & \binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-3}{2}} \\ \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{\frac{p+1}{2}}{\frac{p-3}{2}} \\ \binom{3}{0} & \binom{4}{1} & \binom{5}{2} & \cdots & \binom{\frac{p+3}{2}}{\frac{p-3}{2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{\frac{p-1}{2}}{0} & \binom{\frac{p+1}{2}}{1} & \binom{\frac{p+3}{2}}{2} & \cdots & \binom{p-2}{\frac{p-3}{2}} \end{pmatrix}$$

$C'_{\frac{p-1}{2}-1} = C_{\frac{p-1}{2}-1} - C_{\frac{p-1}{2}-2}$

$C'_{\frac{p-1}{2}-2} = C_{\frac{p-1}{2}-2} - C_{\frac{p-1}{2}-3}$

$\vdots$

$C'_2 = C_2 - C_1$

$C'_1 = C_1 - C_0$

$C'_0 = C_0$

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{\frac{p-3}{2}}{\frac{p-3}{2}} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-3}{2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{\frac{p-3}{2}}{0} & \binom{\frac{p-1}{2}}{1} & \cdots & \binom{p-3}{\frac{p-3}{2}} \end{pmatrix}$$

$F'_{\frac{p-1}{2}-1} = F_{\frac{p-1}{2}-1} - F_{\frac{p-1}{2}-2}$

$F'_{\frac{p-1}{2}-2} = F_{\frac{p-1}{2}-2} - F_{\frac{p-1}{2}-3}$

$\vdots$

$F'_2 = F_2 - F_1$

$F'_1 = F_1 - F_0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{\frac{p-3}{2}}{\frac{p-5}{2}} \\ 0 & \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \cdots & \vdots \\ 0 & \binom{3}{0} & \binom{4}{1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \binom{\frac{p-3}{2}}{0} & \binom{\frac{p-1}{2}}{1} & \cdots & \binom{p-4}{\frac{p-5}{2}} \end{pmatrix}$$

Repeteix molts cops

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Invertible