

Comencem veient quin és l'equilibri de Nash en la segona ronda. És a dir, un cop ja ha sigut la primera ronda, què faran en cada cas.

Si tothom ja ha dit un nombre en la primera ronda, no hi ha res a dir.

Si dos jugadors han dit un nombre en la primera ronda, el jugador dirà el nombre més petit que no hagi aparegut. Si l'1 no ha aparegut llavors guanyarà, i si l'1 ja ha aparegut només guanyarà si els dos l'han dit. És a dir, guanyarà sempre excepte que exactament un digui l'1. Per tant guanyarà amb probabilitat $(1 - 2p_1(1 - p_1))$, on p_1 és la probabilitat de que els primers jugadors hagin dit l'1, donat que han dit un nombre en la primera ronda.

Si només un jugador ha dit un nombre en la primera ronda, veurem que l'equilibri de Nash serà que els altres dos diguin el nombre més petit que encara no ha aparegut. En concret, això implicarà que perdran sempre. Per veure-ho, imagina que el primer jugador ha dit el nombre i . Si $i = 1$ ja perden sempre, així que m'és igual que facin. Si $i > 1$, imagina que el Nash és dir l'1 amb probabilitat p , i més coses. Ara, si un juga això, i l'altre juga a dir sempre l'1, el que juga el Nash mai pot guanyar, però si $p < 1$ el que diu sempre l'1 a vegades guanya, contradint que sigui el Nash. Per tant, efectivament en aquest cas el Nash és que els dos diguin 1 (si 1 ja ha aparegut suda el que facin, ja que no guanyen mai).

Ara el cas en que els tres no diuen res en la primera ronda. Escriu el Nash com $(q_1, q_2, \dots)$, on q_i és la probabilitat que diguin el nombre i . Usarem que, si dos jugadors juguen el Nash, i un juga una estratègia determinista, llavors tots tenen la mateixa probabilitat de guanyar ("*Super well-known factow de Nash, això s'ha de saber i és estàndard*" -Bernat Pagés, **DESPRÉS** que t'hagin cuinat en una entrevista de trading per no saber Nash quan li vas preguntar el dia d'abans si havies de saber algo i et va dir que no). Demostrarem per inducció que $q_i = 1/2$ així.

Cas base. Fes jugar dos jugadors el Nash $(q_1, q_2, \dots)$ amb algú $(1, 0, \dots)$ (és a dir, que sempre juga 1). Ara, aquest últim guanya segur si els primers no diuen 1, probabilitat $(1 - q_1)^2$, i guanya amb probabilitat $1/3$ si tots diuen 1, probabilitat q_1^2 . Per tant

$$\frac{1}{3} = (1 - q_1)^2 + \frac{1}{3}q_1^2 = \frac{4}{3}q_1^2 - 2q_1 + 1.$$

Resolent la quadràtica té solució $q_1 = 1$ i $q_1 = 1/2$. Clarament $q_1 = 1$ no és, ja que sinò l'estratègia de sempre dir 2 guanya sempre. Per tant $q_1 = 1/2$.

Ara fem el pas inductiu. Assumeix que $q_1 = 1/2, \dots, q_n = 1/2^n$. Per trobar q_{n+1} enfrontem dos Nash contra l'estratègia determinista que sempre diu $n + 1$. Guanyarà si els dos altres jugadors diuen un nombre menor a $n + 1$, però els dos iguals, que té probabilitat $q_1^2 + \dots + q_n^2 = \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^n} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}}$, o si els dos diuen un nombre major a $n + 1$, que té probabilitat $(1 - q_1 - \dots - q_n - q_{n+1})^2 = (1/2^n - q_{n+1})^2$. A més, si els dos diuen $n + 1$

guanya $1/3$ de les vegades, i això passa amb probabilitat $\frac{1}{3}q_{n+1}^2$. Per tant, tenim que

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} + (1/2^n - q_{n+1})^2 + \frac{1}{3}q_{n+1}^2.$$

És un càlcul veure que les dues arrels d'aquesta expressió són $1/2^{n+1}$ i $1/2^n$. Però ara, si q_{n+1} fos $1/2^n$ voldria dir que tot q_i amb $i > n + 1$ apareix amb probabilitat 0, i que per tant l'estratègia determinista de sempre dir $n + 2$ té probabilitat $q_1^2 + \dots + q_n^2 + q_{n+1}^2 = 1/4 + 1/16 + \dots + 1/4^{n-1} + 1/4^n + 1/4^n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n} + \frac{1}{4^n} > 1/3$ de guanyar contra el Nash. Això contradiu que sabem que les estratègies deterministes en el suport tenen probabilitat $1/3$ de guanyar contra dos Nash. Per tant, això conclou la inducció.

Ara que ja sabem què fa el Nash en la segona ronda, anem a veure què fa en la primera. Descriu el Nash en la primera ronda com $(p; (p_1, p_2, \dots))$, on p és la probabilitat de dir un nombre en la primera ronda, i p_i és la probabilitat de dir i en la primera ronda, donar que diu algun nombre. Anem a fer jugar dos jugadors amb aquest Nash contra un jugador que juga $(1; (1, 0, \dots))$, és a dir, que diu 1 en la primera ronda.

Si els dos primers jugadors diuen un nombre en la primera ronda (p^2), llavors el tercer jugador guanya si no diuen 1 ($(1 - p_1^2)$), i guanya amb probabilitat $1/3$ si els dos diuen 1 (p_1^2). Si exactament un diu un nombre en la primera ronda ($2p(1 - p)$), llavors només guanya si aquest no diu 1 ($1 - p_1$). Per últim, si els dos no diuen cap nombre en la primera ronda ($(1 - p)^2$), guanya segur. Això ha de sumar $1/3$, pel que tenim

$$\frac{1}{3} = p^2(p_1^2 \cdot 1/3 + (1 - p_1)^2) + 2p(1 - p)(1 - p_1) + (1 - p)^2.$$

És un càlcul veure que aquesta expressió equival a

$$\frac{4}{3}(pp_1)^2 - 2pp_1 + \frac{2}{3} = 0,$$

que és una quadràtica en pp_1 que té solucions 1 i $1/2$. Nota que si és 1 llavors $p = p_1 = 1$, absurd ja que llavors el Nash seria sempre dir 1 en la primera ronda, que perd sempre contra algú que mai diu res en la primera ronda. Llavors hem obtingut que $pp_1 = 1/2$.

Anem a enfrontar dos Nash contra l'estratègia determinista que mai diu res a la primera ronda, i que després diu el nombre més petit que no ha aparegut en la primera ronda. Si els dos Nash diuen un nombre en la primera ronda (p^2) llavors només perd si exactament un d'ells ha dit l'1 ($(1 - 2p_1(1 - p_1))$). Si exactament un diu un nombre en la primera ronda, perdrà sempre, ja que ja sabem que quan exactament dos jugadors arriben a la segona ronda el Nash juga dient el més petit. Si els dos Nash no diuen cap nombre en la primera ronda ($(1 - p)^2$), llavors guanya si els dos nombres dels Nash són més grans que 1

$((1 - 1/2)^2)$, i guanya $1/3$ de les vegades si els dos són un 1 $((1/2)^2)$. Per tant, tenim que

$$\frac{1}{3} = p^2(1 - 2p_1(1 - p_1)) + (1 - p)^2((1/2)^3 \cdot (1/3) + (1 - 1/2)^2).$$

Això reagrupa a

$$p(p(4/3 - 2p_1 + 2p_1^2) - 2/3) = 0.$$

Clarament p no pot ser zero, ja que $pp_1 = 1/2$. Llavors, ficant $p = 1/2p_1$, això reagrupa a una quadràtica, que un càlcul ens diu que té arrels $p_1 = 1$ i $p_1 = 2/3$. Això em dona dos candidats, $(p, p_1) = (1/2, 1)$ i $(p, p_1) = (3/4, 2/3)$.

Vegem que el primer cas no és possible. Imagina que dos jugadors jugues el Nash, i que aquest és $(1/2, (1, 0, \dots))$, i que s'enfronten contra a l'estratègia determinista $(1; (0, 1, 0, \dots))$. És clar que $1/4$ de les vegades guanya perquè els dos Nash diuen 1 a la primera ronda, i hi ha un altre $1/4$ que també guanya perquè els dos Nash esperen a la segona ronda (i sabem que si hi ha exactament dos Nash a la segona ronda, perden). Per tant té probabilitat de guanyar $1/2 > 1/3$.

Per tant, hem conclòs que $p = 3/4$ i que $p_1 = 2/3$. Anem a veure per inducció que $p_i = 1/(2^{i-1} \cdot 3)$ per $i > 1$. Sembla que el cas base l'hem de fer, però no, ja que aquesta condició es pot reescriure com $p_1 + \dots + p_n = 1 - 1/(2^{n-1} \cdot 3)$. Tècnicament veurem ho altre, però com és equivalent perquè $2/3 + 1/6 + \dots + 1/(2^i \cdot 3) = 1 - 1/(2^i \cdot 3)$ no passa res.

Imagina doncs, que $p_1 = 2/3, \dots, p_n = 1/(2^{n-1} \cdot 3)$. Llavors, enfronta dos Nash contra l'estratègia determinista que sempre juga el nombre $n + 1$ en la primera ronda. Amb probabilitat $(1/4)^2$ els Nash no juguen a la primera ronda, i per tant guanya sempre. Si exactament un d'ells juga a la primera ronda, perd segur. Per últim, amb probabilitat $(3/4)^2$ els dos Nash juguen la primera ronda, així que guanya si els altres dos diuen un nombre més petit a $n + 1$ però repetit, que té probabilitat $p_1^2 + \dots + p_n^2 = 4/9 + 1/9(1/4 + 1/4^2 + \dots + 1/4^{n-1}) = 4/9 + 1/9 \cdot \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}}$, o si els dos diuen un nombre més gran que $n + 1$, que té probabilitat $(1 - p_1 - \dots - p_n - p_{n+1}) = (1/(2^{n-1} \cdot 3) - p_{n+1})^2$, o també guanya amb probabilitat $1/3$ si els dos Nash diuen $n + 1$ que té probabilitat p_{n+1}^2 . Això ha de donar $1/3$, i per tant obtenim

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{16} + \frac{9}{16} \left(4/9 + 1/9 \cdot \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} + (1/(2^{n-1} \cdot 3) - p_{n+1})^2 + \frac{1}{3}p_{n+1}^2 \right).$$

És un càlcul veure que les dues arrels d'aquesta quadràtica són $1/(2^n \cdot 3)$ i $1/(2^{n-1} \cdot 3)$. En el darrer cas implicaria que el Nash pren nombres majors a $n + 1$ amb probabilitat 0. Però si enfrontem aquest Nash amb l'estratègia determinista de treure sempre $n + 2$ en la

primera ronda, veiem que té probabilitat de guanyar contra el Nash de $1/16 + 9/16(p_1^2 + \dots + p_n^2 + p_{n+1}^2)$. Fent servir la fórmula anterior, per a que això donés $1/3$ encessariem que $(1/(2^{n-1} \cdot 3))^2 = (1/(2^n \cdot 3) - 1/(2^{n+1} \cdot 3))^2 + \frac{1}{3}(1/(2^{n+1} \cdot 3))^2$, que no ho és perquè el terme de l'esquerra és més gran. (Aquí hem usat que si escollim $p_i = 1/2^{i-1} \cdot 3$ se satisfan les equacions, que això ja ho ha demostrat la inducció).

Per tant, hem acabat. En resum, hem demostrat que en la primera ronda el Nash ve donat per $(3/4; (2/3, 1/6, 1/12, \dots))$, i que en la segona ronda s'escull el més petit si només queden un o dos, i s'escull $(1/2, 1/4, 1/8, \dots)$ si queden els tres.

Three Men Orchestra