

Problema 94.

ENCURTIDOS VILLAREAL

March 4, 2026

Com els simps de la Mencía són tots molt llestos¹, els hi farem memoritzar la següent informació.

- El conjunt S dels simps de la Mencía.
- El conjunt $\mathcal{F}$ de funcions $f: S \rightarrow \{0, \dots, 10\}$.
- Una funció $\Phi: \mathcal{F} \rightarrow \{0, \dots, 10\}$ amb la següent propietat. Si $f_0, f_1, \dots, f_{10} \in \mathcal{F}$ són tals que existeix un únic simp $x \in S$ tal que

$$\begin{aligned} f_k(x) &\equiv -k \pmod{11} \quad \forall k = 0, 1, \dots, 10, \\ f_i(y) &= f_j(y) \quad \forall i, j \in \{0, \dots, 10\}, y \in S \setminus \{x\}, \end{aligned}$$

llavors

$$\Phi(f_0) + 10 \equiv \Phi(f_1) + 9 \equiv \Phi(f_2) + 8 \equiv \dots \equiv \Phi(f_{10}) \pmod{11}.$$

Lamentablement, els simps de la Mencía no són prou llestos com per construir-se Φ ells mateixos, així que ja els hi faig jo la feina.

Definim una relació de equivalència a $\mathcal{F}$, on diem que $f \sim g$ si hi ha un nombre finit de simps $x \in S$ pels que $f(x) \neq g(x)$. Per cada classe, podem triar (amb l'axioma de l'elecció) un representant. La idea és que triarem la imatge sota Φ dels representats de cada classe arbitràriament, i llavors ajustarem com toca els elements de la seva classe. Formalment, si $C \subset \mathcal{F}$ és una classe amb representant f , llavors assignem $\Phi(f) = 0$, i per tota $g \in C$, posem $\Phi(g) \in \{0, 1, \dots, 10\}$ tal que

$$\Phi(g) \equiv \Phi(f) + \sum_{x \in S} g(x) - f(x) \pmod{11}.$$

Com $f \sim g$, aquesta suma de $x \in S$ està ben definida. És directe comprovar que sota aquesta definició, Φ compleix el que es demana. Per suposat, les funcions $f_0, \dots, f_{10}$ de la condició són totes de la mateixa classe, pel que la nostra definició de Φ facilment dona el resultat.

Ara ja només cal donar una estratègia pels Simps. Cada assignació de puntuacions als Simps dona lloc a una funció $f \in \mathcal{F}$. Desde el seu punt de vista, el Simp $x \in S$ sap $f(y)$ per tota $y \in S \setminus \{x\}$. Així doncs, el simp respondrà $\Phi(f)$, on $\tilde{f}$ és la funció de $\mathcal{F}$ tal que $\tilde{f}(x) = 0$ i $\tilde{f}(y) = f(y) \forall y \in S \setminus \{x\}$.

Ara observem que el simp x encerta si i només si $\Phi(f) = 0$ gràcies a la propietat que Φ satisfà. Per tant hem guanyat.

¹Citation Needed².

²Not for my boy Rafa though.