CARLOS MUJERIEGO

107. Ping Pong (Lista 7)

Sea S_i el jugador más fuerte despúés de la i-ésima ronda. $S_0 = 1$.

Claim: $S_{i+1} \leq S_i + 2 \quad \forall i$.

Si en la ronda $(i+1)$ se ha eliminado al jugador S_i, como éste es el mejor, lo habrá eliminado $S_i + 1$ o $S_i + 2$, por lo que alguno de estos seguirá en la siguiente ronda.

Por tanto, $S_N \leq S_{N-1} + 2 \leq \dots \leq S_0 + 2N \leq 2N + 1$.
Veamos que $2N+1$ no puede ganar.
Para que pase esto, todas las desigualdades han de ser igualdades. En particular, en la primera ronda se eliminan $1, 2 \Rightarrow 3, 4$ no se eliminan.
Por inducción, en la i-ésima ronda se eliminan S_i y $S_i + 1 \Rightarrow S_i + 2$ y $S_i + 3$ no se eliminan.

~~No obstante, en la final solo se puede eliminar uno porque, por lo que, es imposible que S_{N-1} y $S_{N-1}+1$ se eliminen simultaneamente.~~

Por lo tanto, en la final quedarán $2N-1$ y $2N$ por lo que $2N+1$ no puede ganar.
Veamos que $2N$ sí que puede, por inducción:
Caso base, $N = 1$ trivial.
Paso inductivo: Separamos el bracket en 2, en la primera mitad los 2^{N-1} mejores, y en la otra los peores.
Por inducción, el jugador $2(N-1)$ puede ganar su bracket, y es evidente que $2N$ puede ganar su bracket. Por tanto se pueden enfrentar en la final y que gane $2N$.