ANDAMOS MANSOS

A l'enunciat teniu un typo però el resoldré com ho valeu segurament. Dieu que la FME està a Espanya però en realitat està a Catalunya. Els mapes son legals tts. Igualment dir que Espanya ens roba és una veritat com una catedral així que em creuré la resta de l'enunciat.

a) ~~(Als equilibris de Nash els dos països tenen EV zero i Espanya diu~~)

Hi ha uns quants equilibris de Nash.

Espanya diu 1 sempre i Andorra ≥ 1: $\mathbb{E}(\text{Espanya}) = 1$

$\mathbb{E}(\text{Andorra}) = 0$

Espanya diu 1 i Andorra 0. EV=0 per tots

Els dos diuen 0.

Aquest son els únics. Això es deu a que, si Espanya té distribució de probabilitats $(p_i)_{i=0,\dots,100}$ i Andorra $(q_i)_{i=0,\dots,100}$, i Espanya diu un nombre més alt del que mai dirà Andorra (i.e $\exists i$ amb $p_i > 0$ i $q_j = 0 \ \forall i \leq j$) a Espanya li surt a compte baixar aquest p_i més abaix.

Scanned with CamScanner

A Andorra li passa algo similar, però tinguent en compte que l'empat els perjudica, no els hi surt a compte tenir un índex i pel qual

$$q_i > 0 \quad i \quad p_j = 0 \quad \forall j > i$$

Repetint aquest procés arribem a que totes les probabilitats es concentren al voltant del 0 i el 1.

b) En aquest cas, els dos jugadors tenen la següent estratègia (Això en general)

Andorra: Una distribució de probabilitats P sobre $\{0, \dots, 100\}$

Espanya: Una funció f que admet distribucions P i les transforma en una P'.

Llavors, en un equilibri de Nash, Espanya tindria una funció que donada qualsevol distribució P, en troba la més òptima per ell mateix. D'aquesta forma, Andorra pot assumir que Espanya juga de manera òptima. Utilitzant la notació de l'apartat a, introduïm

$$S_i = q_{100} + q_{99} + \cdots + q_{i+1} + q_i$$

Scanned with CamScanner

I l'esperança d'Espanya fixada els (s_i) és

$$\mathbb{E}(\text{Espanya}) = p_0 \cdot 0 \cdot s_0 + p_1 \cdot 1 \cdot s_1 + \cdots + p_{99} \cdot 99 \cdot s_{99} + p_{100} \cdot 100 \cdot s_{100}$$

Així doncs a Espanya li interessa augmentar tots els p_i pels quals is_i és màxim. En concret assumim que l'estratègia és:

1) Escollir el màxim índex k pel qual

$$k = \arg\max_i \, is_i$$

2) Posar $p_k = 1$.

I en concret l'esperança d'Espanya és ks_k.

Ara calculem la d'Andorra assumint que Espanya segueix el que hem dit

$$\mathbb{E}(\text{Andorra}) = 0 \cdot q_0 + 1 q_1 + \cdots + (k-1) \cdot q_{k-1}$$

$$= s_1 + s_2 + \cdots + s_{k-1} + s_k - ks_k$$

Definim $c = ks_k = \mathbb{E}(\text{Espanya})$, llavors

$$\mathbb{E}(\text{Andorra}) = s_1 + s_2 + \cdots + s_k - c \quad \text{amb} \quad \begin{array}{l} ks_k = 0 \\ is_i \leq c \quad \forall i \leq k \end{array}$$

Ara fem la observació que si Andorra tria

$$S_{k+1} = \frac{c}{k+1} \leq \frac{c}{k} = S_k \quad \text{(Així que és una tria vàlida)}$$

Llavors la nova esperança és

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_k + S_{k+1} - c > S_1 + \cdots + S_k - c$$

Així doncs, Andorra optimitza la seva estratègia per a que $k = 100$. A partir d'aquí pot augmentar tots el S_i per a incrementar l'esperança. Llavors tria

$$S_i = \min\left\{1, \frac{c}{i}\right\} \quad \text{Aquesta tria és vàlida ja que } S_{i+1} \leq S_i$$

I té esperança

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\lfloor c \rfloor \text{ cops}} + \frac{c}{\lfloor c \rfloor + 1} + \frac{c}{\lfloor c \rfloor + 2} + \cdots + \frac{c}{100} - c$$

$$= \lfloor c \rfloor - c + c \cdot g(\lfloor c \rfloor + 1) \quad \text{on} \quad g(n) = \sum_{i=n}^{100} \frac{1}{i}$$

Optimitzant aquesta funció sobre c veiem que el màxim es dona en $c = 37$, amb un valor $EV \approx 36'47428$. Llavors l'equilibri és: Espanya tria 100

Andorra té probabilitat cumulativa de $\min\left\{1, \frac{37}{i}\right\} = S_i$ (per la dreta)